

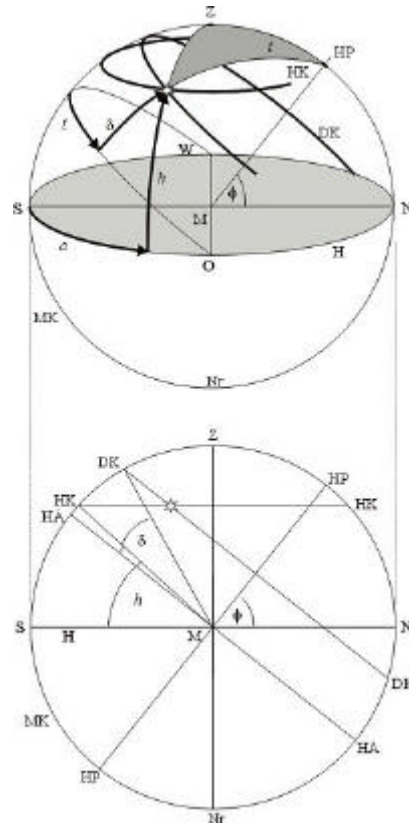
Das zeichnerische sphärische Rechnen im Mathematik- und Astronomieunterricht

... und eine überraschende neue Deutung des Stonehenge-Bauplans

Die Gestirnspositionen an der Himmelssphäre, die Auf- und Untergangsorte, Kulminationshöhen und die Koordinaten der Sterne im Äquator- und Horizontsystem lassen sich ohne die Verwendung der trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus auch auf graphischem Weg ermitteln.

Man betrachtet verschiedene Schnitte durch die Himmelssphäre, bringt diese durch Umklappungen in geeigneter Weise zu Deckung und entnimmt diesen trickreichen Darstellungen die gesuchten Winkel. Das Verfahren stellt die räumlichen Verhältnisse ohne Informationsverlust in der Ebene dar und setzt nur Zirkel, Lineal und Winkelmaß voraus.

Das sphärisch-geometrische Rechnen schult das räumliche Vorstellungsvermögen und es birgt sogar eine überraschende Deutung des Bauplans von Stonehenge als Sinnbild für die Himmelssphäre unter gewissen astronomisch-geodätischen Voraussetzungen.



Burkard Steinrücken, steinruecken@sternwarte-recklinghausen.de

Westfälische Volkssternwarte und Planetarium, Stadtgarten 6, 45657 Recklinghausen

Einleitung

Die Phänomenologie der Gestirnsbewegungen über dem Horizont eines Beobachters lässt sich – überraschend genug! – mit der Grundannahme einer Himmelssphäre anschaulich darstellen und qualitativ und quantitativ richtig beschreiben. Die Abbildung 1 zeigt z.B. die im Laufe des Jahres veränderliche Sonnenbahn in Gestalt von parallelen Bogenstücken auf einer Halbkugel. Dabei ist es ohne Belang, ob es diese Kugel in materieller Form überhaupt gibt, bzw. wie groß sie in einem solchen Fall wäre. Es geht hier nur um die Winkelbeziehungen der Gestirne zu den Bezugskreisen des Horizontes und des Himmeläquators und den Polen dieser beiden Fundamentebenen – den Zenit und den Himmelspol (Abb. 2).

Aus drei beliebigen Punkten an der Sphäre, die nicht auf einer kürzestmöglichen Verbindung liegen, lassen sich eine Vielzahl von Dreiecken formen, je nachdem, wie die Verbindung von je zwei dieser Punkte erfolgt – entlang eines Kleinkreises oder eines Großkreises. Die Abbildung 2 enthält in hellblau ein Dreieck, das nur von Großkreissegmenten begrenzt wird. Verbindet man dagegen den Himmelspol und den Stern entlang des Höhenkreises – ein Kleinkreis, dessen Mitte nicht durch die Sphärenmitte geht –, so erhält man das um den dunkelblauen Bereich erweiterte Dreieck. Die Dreiecke, die nur aus Großkreissegmenten gebildet sind, beanspruchen eine Sonderstellung, da sie mit den Winkelbeziehungen korrespondieren, die ein Beobachter feststellt, der ohne die hilfreiche Vorstellung der gedachten Himmelssphäre auskommen will (Abb. 3). Da absolute Längenmaße keine Rolle spielen (der Radius der Himmelssphäre ist ohne Belang), handelt es sich auch bei den Bogenstücken entlang der Himmelssphäre um Winkel, die sogenannten „Seitenwinkel“ a , b , c . Man erhält sie in einer Vorstellungswelt ohne Himmelssphäre als jene Winkel, die sich

zwischen den Blickrichtungen zu zwei Punkten der Sphäre aufspannen (Abb. 3). Die Innenwinkel A , B , C des sphärischen Dreiecks sind dann jene Winkel, um die die zwei Ebenen, jeweils gebildet aus zwei Dreieckspunkten und dem Beobachter in der Mitte M , gegeneinander verkippt sind. Sie sind also nicht unmittelbar sichtbar, sondern erschließen sich durch das Kalkül.

Für die Beziehungen zwischen den Innen- und Seitenwinkeln des sphärischen Dreiecks hält die sphärische Trigonometrie einen Sinus- und zwei Kosinussätze bereit. In der Schulmathematik, die sich zumeist mit der Geometrie auf der Ebene befasst, werden sie nicht behandelt, und im Astronomiestudium, das an die modernen Forschungsfelder heranführen will, tauchen sie eher als „Blockschaubild“ einer heute überholten Form der erdgestützten Astrometrie auf, an das sich noch vereinzelt Übungen zur Förderung der erweiterten astronomischen Elementarbildung anschließen.

Nicht, dass die sphärische Astronomie einen höheren Stellenwert in der modernen astrophysikalischen Ausbildung beanspruchen sollte - nein, natürlich nicht, aber warum man im Zeitalter der Globalisierung, in dem weltumspannende Beziehungen per Flugreisen und Internet mittlerweile zum täglichen Leben gehören, die mathematische Beschreibung der Kugel und das sich daran übende sphärisch-räumliche Vorstellungsvermögen im Mathematikunterricht nahezu vollends ausblendet, ist auch nicht verständlich und nicht vernünftig.

In diesem Aufsatz soll gezeigt werden, dass man auch ohne Sinus und Kosinus die sphärische Trigonometrie völlig korrekt und auch anschaulich behandeln kann, ohne sich auf einzelne Schnitte durch die Himmelskugel, wie z.B. dem Meridianschnitt, einschränken muss. Als Überraschung stellt sich die Anwendbarkeit dieser zeichnerischen Methode auf den Bauplan von Stonehenge heraus. Womöglich hat man sich schon in der Steinzeit mit dieser Art der Mathematik und der geometrischen Darstellung des Himmels beschäftigt und die Ergebnisse aus religiösen und rituellen Motiven in der Landschaft „aufgezeichnet“. Die Himmelskugel ist damit durch Projektionen und Umklappungen auf die Horizontalebene am Ort der Beobachtungen abgebildet und als astralreligiöses Bauwerk verewigt. Vielleicht ist diese wundersame Übereinstimmung aber auch nur ein Zufall.

Darstellung der gedachten Himmelskugel in Zeichnungen

Zur Beschreibung einer Gestirnsposition an der Sphäre wird ein Koordinatenpaar aus zwei Winkeln benötigt. In der Astronomie gebräuchlich sind das Horizontsystem mit den Winkeln Azimuth a (ausgehend vom Südpunkt entlang des Horizontes Richtung Westen gemessen) und Höhe h (ausgehend vom Horizont entlang des Vertikals, Abb. 4) und das Äquatorsystem mit dem Stundenwinkel t (der vom Stundenkreis überstrichene Winkel seit der oberen Kulmination des Gestirns auf dem Meridian) und der Deklination d (gemessen entlang des Stundenkreises ausgehend vom Himmelsäquator, Abb. 5).

Beide Koordinatensysteme lassen sich mit Hilfe der geographischen Breite f verknüpfen. Zunächst wird ein Großkreis durch die beiden Polpunkte der Systeme – Zenit und Himmelsnordpol – gelegt. Die Punkte, an denen dieser sog. „Meridian“ den Horizont schneidet, werden „Nordpunkt“ und „Südpunkt“ genannt. Auf diese Weise werden die irdischen Himmelsrichtungen von der Geometrie der Himmelsphäre abgeleitet. Zusammen mit Teilstücken des Vertikals und des Stundenkreises bildet das Meridiansegment zwischen Himmelsnordpol und Zenit ein sphärisches Dreieck aus Großkreissegmenten (Abb. 6). Das Bogenstück zwischen Himmelsnordpol und Zenit beträgt $90^\circ - f$, das zwischen Zenit und Gestirn $90^\circ - h$ und das zwischen Pol und Gestirn $90^\circ - d$.

In Abbildung 7 ist die Himmelskugel noch um die untere Halbsphäre ergänzt und einen Höhenkreis HK (rot) und einen Deklinationskreis DK (blau) erweitert. Diese Kreise erfassen den Stern jeweils in einer Parallelbahn zum Horizont bzw. zum Äquator. Es sind Kleinkreise, d.h. ihre Mitte schließt den Beobachter in M nicht mit ein, wie das bei Großkreisen der Fall ist.

So anschaulich die bislang gezeigten symbolischen Darstellungen des Himmelsgewölbes auch sein mögen, zur Entnahme von Winkeln taugen sie nicht. Man muss sich aber im Folgenden gelegentlich auf diese zwar zweidimensionale aber doch dreidimensional gemeinte Darstellungsform berufen, um bei der nun zu entwickelnden ebenen Variante der Sphärendarstellung den Durchblick zu behalten. „Durchblick“ ist hier wörtlich gemeint, denn bei der ebenen Darstellungsform „blickt“ man in das Geflecht der Großkreise und Koordinatenbogenstücke aus einer bestimmten Richtung „hindurch“.

Ein solcher Durchblick ist in der Abbildung 8 dargestellt. Es ist ein Aufriss der Himmelskugel mit der von Osten her betrachteten Meridianebene als Aufrissebene. Die sichtbaren Geradenstücke sind die in die Zeichenebene projizierten Großkreise aus Abbildung 7. Markiert sind der Horizont mit H , der Meridiankreis mit MK , der Himmelsäquator mit $H\ddot{A}$, der Zenit mit Z , der dem Zenit gegenüberliegende Nadir mit Nr , der Nordpunkt mit N , der Südpunkt mit S , die Himmelspolachse mit HP , der Höhenkreis mit HK und der Deklinationskreis mit DK . Nicht darstellbar sind der Vertikalkreis VK und der Stundenkreis SK , weil ihre zugeordneten Großkreiseebenen nicht senkrecht auf der Aufrissebene stehen. Drei der fünf Koordinaten (a , h , t , d , f) sind unmittelbar in Abbildung 9 zugänglich: Die geografische Breite f als Winkel zwischen der Polachse zum Himmelspol HP und der Mittagslinie $S-N$ bzw. $90^\circ - f$ als Winkel zwischen dem Himmelsäquator $H\ddot{A}$ und der Mittagslinie; die Gestirns Höhe h als die Höhenkreislage aus dem Winkel zwischen der Linie von der Mitte M zum Schnittpunkt des Höhenkreises mit dem Meridiankreis und der Mittagslinie. Schließlich die Deklination d aus dem Winkel zwischen M und dem Schnittpunkt Deklinationskreis-Meridiankreis und dem Himmelsäquator.

Zur Bestimmung der beiden verbleibenden Koordinaten Azimuth a und Stundenwinkel t sind Umklappvorgänge von Kreissegmenten erforderlich. In Abbildung 9 ist der senkrecht zur Zeichenebene angeordnete Höhenkreis HK nun in die Zeichenebene hineingeklappt. Wegen der Symmetrie zwischen Vor- und Nachmittagsseite muss man sich anhand der „dreidimensionalen“ Abbildung 7 verdeutlichen, ob das Gestirn auf der Ost- oder Westseite steht. Das bestimmt letztlich den richtigen Quadranten bei der Azimuthbestimmung. Im skizzierten Fall ist das Gestirn auf der Westseite des Himmels und folglich zeigt der hochgeklappte Bogen den westlichen Teil des Höhenkreises. Die senkrechte Linie, die im Gestirn ansetzt und bis zum Rand dieses Halbbogens reicht, ist eine in der Höhenkreisebene vom Gestirn nach Westen zeigende Linie. Sie trifft den westlichen Höhenkreis an einer Stelle, die als Hilfsmarke $S2$ zur Bestimmung des Azimuthes verwendet werden kann. Verbindet man schließlich diesen Hilfspunkt $S2$ mit der Höhenkreismitte $M2$, die senkrecht über M liegt, so findet man das Azimuth a als Winkel zwischen dieser Linie und der Basislinie des umgeklappten Höhenkreises. Analog verfährt man bei der Bestimmung des Stundenwinkels in Abbildung 10. Nun klappt man den halben Deklinationskreis in die Zeichenebene hinein, ermittelt einen entsprechenden Hilfspunkt $S3$ auf dem Deklinationskreisbogen, verbindet diesen Hilfspunkt mit der Mitte $M3$ des Deklinationskreises, die zwischen M und HP liegt, und gewinnt t als den Winkel zwischen der Basislinie des Deklinationskreises (entlang derer der Deklinationskreis geklappt wurde) und dem zuvor gezeichneten Hilfspunktstrahl.

Die bei diesem Verfahren eingeführten Hilfspunktstrahlen nach **S2** und **S3** zeigen in die Richtung des Vertikalkreises bzw. Stundenkreises, jeweils betrachtet innerhalb der Ebene des Höhen- bzw. Deklinationskreises.

Damit sind alle 5 Größen zur Bestimmung der Sternposition im Horizont- und Äquatorsystem in der ebenen Darstellung zugänglich gemacht. Durch die Umklapptechnik kommt Information in die Zeichenebene hinein, die bei reinen Projektionen verloren ginge.

Eine wichtige Aufgabe der sphärischen Geometrie ist die Umrechnung des Koordinatenpaares (a, h) in das Paar (t, d) und umgekehrt. Die Abbildungen 9 und 10 ermöglichen diese Transformationen auf zeichnerischem Weg. Ist neben der geografischen Breite f das Paar (a, h) gegeben, so fertigt man zunächst eine der Abbildung 9 entsprechende Zeichnung. Man ermittelt dabei unter Auswertung von h und a die Gestirnsposition S in der Aufrissebene. Durch diesen Ort legt man den Deklinationskreis und bestimmt d . Abschließend klappt man den Deklinationskreis wie in Abbildung 10 gezeigt in die Aufrissebene und ermittelt t . Ist zunächst das Paar (t, d) gegeben, so geht man umgekehrt vor und fertigt bei der Bestimmung der Gestirnsposition in der Aufrissebene zunächst den Deklinationskreis (wie in Abb. 10) und danach zur Ermittlung von (a, h) den Höhenkreis (wie in Abb. 9).

Behandlung einiger Fallbeispiele aus der Praxis der sphärischen Astronomie

Im vielen Anwendungsfällen der sphärischen Astronomie muss man aus einer Schar gegebener Größen aus beiden Koordinatensystemen die verbleibenden gesuchten Winkel ermitteln. Dann stellt sich der Sachverhalt u.U. komplexer dar, als es die vorangegangenen Betrachtungen vermuten lassen. Denn in diesen verschiedensten Fällen ist jeweils eine Strategie zu entwickeln, wie die Zeichnung mit Hilfe der gegebenen Größen aufgebaut werden kann und wie sie dann im Hinblick auf die gesuchten Koordinaten auszuwerten ist. Dazu zunächst einige Beispiele.

Beispiel 1: Auf und Untergangszimuthe der Sonnenwenden

In der Archäoastronomie findet man viele Hinweise für die Kennzeichnung der Auf- und Untergangszimuthe der Sonne an den Tagen der zwei jährlichen Sonnenwenden, an denen die Sonne ihre positive und negative Maximaldeklination von $\pm 23,5^\circ$ aufweist. Offensichtlich wurden in prähistorischen Kulturen die Sonnenwenden besonders beachtet. Wie ermittelt man mit dem zeichnerischen Rechnen die Azimuthe der Sonnenwenden auf dem Horizont ($h = 0$) für den 51. Breitengrad (Stonehenge, Himmelsscheibe von Nebra)? - Man fertigt eine der Abbildung 8 entsprechende Zeichnung mit $f = 51,0^\circ$ an, in der sich zwei Deklinationskreise für die positive und negative Extremaldekliniation befinden (Abb. 11; schematische Skizze). Der Lichtbrechungseffekt der beim Auf- oder Untergang flach in die Atmosphäre hineinstrahlenden Sonne soll hier ebenso wie der genaue Verlauf des Landschaftshorizontes unberücksichtigt bleiben. Die Rechnung erfolgt für die Sonnenmitte.

Die Punkte *WSW* (Wintersonnenwende) und *SSW* (Sommersonnenwende) markieren die Horizontorte der Sonne in der Aufrissebene. Nun erfolgt die Umklappung des Horizontbogens, der hier mit dem gleichgroßen Meridiankreis zusammenfällt, da als Voraussetzung $h = 0$ eingeht. Von *WSW* und *SSW* zeichnet man senkrechte Strahlen bis zum Rand des Horizontes, wodurch man die Hilfspunkte **S2** und **S2'** konstruiert. Von der Mitte *M* des Horizontkreises zeichnet man nun Azimuthstrahlen zu diesen Hilfspunkten und erhält die

Auf- oder Untergangszimuthe (sie liegen ja symmetrisch bezüglich der Mittagslinie) aus dem Winkel zwischen diesen Azimuthstrahlen und der Mittagslinie $N-S$.

Für $h = 0$ und $f = 51^\circ$ erhält man $a1 = 50,7^\circ$ für die Wintersonnenwende und $a2 = 129,3^\circ$ für die Sommersonnenwende. Der Pendelbogen zwischen dem Aufgangsort der Sommersonne und dem der Wintersonne beträgt $Da = a2 - a1 = 78,6^\circ$.

Die Formel aus der sphärischen Trigonometrie für die Berechnung der Azimuthe auf dem Horizont lautet $\cos a = -\sin d / \cos f$. Sie lässt sich durch Auswertung der Zeichnung 11 herleiten, wird hier aber ohne Beweis angegeben.

Sowohl die beiden Azimuthe $a1$ und $a2$ als auch Da hängen von der geographischen Breite f ab. Allerdings ändert sich Da nur wenig, wenn die Azimuthe auf Höhenkreisen ermittelt werden, die in nicht allzu großen Höhenwinkel über dem Horizont liegen. Dies soll ein weiteres Beispiel demonstrieren, bei dem die entsprechenden Sonnenstände auf einem künstlichen Horizont der Höhe $h = 10^\circ$ zu ermitteln sind.

Beispiel 2: Auf und Untergangszimuthe der Sonnenwenden auf einem künstlichen Horizont

In der Abbildung 12 (wiederum eine schematische Skizze ohne exakte Winkelumsetzung wie in der Aufgabenstellung gefordert) ist dieser Höhenkreis mit $h = 10^\circ$ nun zu finden. Klappt man ihn um, so liegt er als Kleinkreis nicht mehr deckungsgleich zum Meridiankreis.

Ausgehend vom Schnitt der Deklinationskreise mit diesem Höhenkreis (die Punkte WSW und SSW) ermittelt man wieder die Hilfspunkte $S2$ und $S2'$ am Rand des umgeklappten Höhenkreises, die nun nicht mehr symmetrisch zu den Himmelsrichtungen liegen, und bestimmt deren Azimuthe $a1$ und $a2$ in Bezug auf die Höhenkreismitte $M2$. Man erhält $a1 = 30,6^\circ$, $a2 = 115,2^\circ$ und $Da = 84,6^\circ$. Die entsprechende Formel lautet nun (wieder ohne Beweis) $\cos a = -(\sin d / (\cos h \cdot \cos f)) - \tan h \cdot \tan f$.

Beispiel 3: Die Länge des längsten und des kürzesten Tages im Jahr

Das nächste Beispiel für das zeichnerische sphärische Rechnen befasst sich mit der Bestimmung des Stundenwinkels bzw. mit der Länge des Tagbogens der Sonne. In welchem Verhältnis steht die Länge des längsten zu der des kürzesten Tages im Jahr auf dem 51° Breitengrad? Mit der Bestimmung dieses Verhältnisses bzw. mit der Messung der

Absolutlänge des längsten Tages bestimmte man in der Antike auch den Breitenkreis der Beobachtung. Die Aufgabenstellung hier fordert allerdings den umgekehrten Weg: Aus der bekannten geographischen Breite und den solaren Grenzdeklinationen sind die extremalen Längen des lichten Tages beim Sommer- und Winteranfang zu ermitteln.

Wieder beginnt der Lösungsweg mit der Zeichnung der Himmelskugel bei Ansicht von Osten (Abb. 13 & 14). Die Deklinationskreise der extremalen Sonnendeklination bei der Sommer- (Abb. 13) und Wintersonnenwende (Abb. 14) schneiden in der Aufrisszeichnung die Mittagslinie in den Punkten SSW und WSW . Diese Punkte sind die Horizontorte der Sonne in der Aufrissebene. Da nun Stundenwinkel zu bestimmen sind, wird in den Abbildungen 13 und 14 jeweils der Deklinationskreis, auf dem die Sonne zwischen Mitternacht und Mittag verläuft, in die Zeichenebene umgeklappt. Die von der Basislinie des Deklinationskreises senkrecht aufsteigende Hilfslinie trifft den Deklinationskreis im Hilfspunkt $S3$. Dieser Punkt ist der Schnittpunkt des gesuchten Stundenkreises beim Sonnenaufgang mit dem Deklinationskreis. Verbindet man $S3$ mit der Mitte des Deklinationskreises $M3$, so erhält man den Stundenwinkel t als Winkel zwischen diesem Strahl zum Hilfspunkt und der Basislinie des Deklinationskreises, die ja innerhalb der Meridianebene liegt. Der Stundenwinkel gibt die

zwischen Sonnenaufgang und oberer Sonnenkulmination auf dem Südmeridian verfllossene Zeit im Winkelmaß an. Zur Umrechnung in Zeit multipliziert man diesen Winkel, der den halben Tagbogen der Sonne repräsentiert, mit dem Faktor 1 Stunde / 15°. Dann erhält man die Zeitdauer des Vormittags, die noch zu verdoppeln ist, um die Länge des ganzen lichten Tages von Sonnenauf- bis -untergang zu erhalten.

Die Abbildung 13 zeigt die zeichnerische Lösung für den Tagbogen der Sommersonnenwende. Man erhält eine Tageslänge von 16h 20m. Analog verfährt man mit dem Deklinationskreis der Wintersonnenwende in Abbildung 14 und man erhält schließlich 7h 40m für die Länge des kürzesten Tages. Das Verhältnis für die Dauer des längsten zum kürzesten Tag liegt damit für den 51. Breitengrad bei 2 : 1. Die babylonische Astronomie, die sich im weiter südlich gelegenen Zweistromland Mesopotamien im ersten Jahrtausend vor Christi Geburt entwickelte, kannte für dieses Verhältnis den Näherungswert von 3 : 2. Allerdings wurde dieser Wert von den babylonischen Astronomen nicht mit den hier beschriebenen geometrischen Methoden berechnet, sondern durch die Zeitmessung mit Wasseruhren bestimmt. Die Formel zur Bestimmung des Aufgangsstundenwinkels lautet $\cos t = -\tan d \cdot \tan f$.

Weitere Konstruktionsvorschriften zur Lösung sphärischer Aufgaben

Stellt man alle möglichen Kombination der fünf Koordinaten (f, a, h, t, d) mit jeweils drei gegeben und zwei unbekanntem Größen auf, so stellen sich folgende Fälle als lösbar heraus:

- 1) f ist bekannt und ein vollständiger Koordinatensatz (a, h) oder (t, d) ist bekannt
- 2) f ist bekannt und beide Kleinkreise (h und d) sind gegeben
- 3) f ist unbekannt und ein vollständiger Koordinatensatz und der Kleinkreis des anderen Satzes sind bekannt

Damit zerfällt die Menge der Kombinationen aus drei Bekannten und zwei Unbekannten in einen lösbaren und einen unlösbaren Teil.

Lösbare Kombinationen:

- $(f, a, h) \rightarrow (t, d)$
- $(f, t, d) \rightarrow (a, h)$
- $(f, h, d) \rightarrow (a, t)$
- $(t, d, h) \rightarrow (a, f)$
- $(a, h, d) \rightarrow (t, f)$

Unlösbare Kombinationen:

- $(a, t, d) \rightarrow (h, f)$
- $(a, h, t) \rightarrow (d, f)$
- $(f, a, t) \rightarrow (d, h)$
- $(f, a, d) \rightarrow (t, h)$
- $(f, h, t) \rightarrow (d, a)$

Zur Verdeutlichung der Unlösbarkeit einzelner Kombinationen kann man sich Fragen und Antworten dieser Art zusammenstellen: Ist ein Gestirn durch die Angabe des Breitengrades der Beobachtung, des Azimuthes und des Stundenwinkels eindeutig bestimmt? – Nein, denn es können Sterne mit verschiedensten Deklinationen bei verschiedenen Höhen zur selben Zeit in der gleichen Himmelsrichtung stehen.

Neue zeichnerische Kunstgriffe müssen eingeführt werden, um z.B. aus den gegebenen Größen t , d und h das Azimuth a und die geografische Breite f zu bestimmen: $(t, d, h) \rightarrow (a, f)$. Da nun der Bezug der Gestirnsbahn zur Horizontebene des Beobachters noch nicht bekannt ist, sondern als Ergebnis konstruiert werden muss, zeichnet man den gegebenen Höhenkreis HK und den Deklinationskreis DK zunächst parallel zueinander (Abb. 15). In diesem Fall ist die waagerechte Linie durch die Mitte des Meridiankreises sowohl die Mittagslinie $N-S$, als auch der in die Zeichenebene projizierte Himmelsäquator $H\ddot{A}$.

Da neben h und d auch noch t gegeben ist, lässt sich durch das Umklappen des Deklinationskreises in die Zeichenebene weitere Information einbringen. Man trägt wie gewohnt t am Deklinationskreis ab, erhält so den Hilfspunkt $S3$, fällt von diesem aus das Lot auf die Basislinie des umgeklappten Deklinationskreises und erhält die in die Zeichenebene projizierte Gestirnsposition S im Äquatorialsystem. Wäre man am Erdnordpol ($f = 90^\circ$), wo Zenit und Himmelspol zusammenfallen, so läge der Höhenkreis zur bekannten Höhe h deckungsgleich auf dem Deklinationskreis und das Azimuth a wäre identisch mit dem Stundenwinkel t . In dem Fall wäre die Aufgabe schon gelöst. Im Allgemeinen wird aber von einem Breitenkreis mit $f \neq 90^\circ$ beobachtet, und die projizierte Gestirnsposition im Äquatorialsystem muss dann nach Voraussetzung auch mit dem bekannten Höhenkreis der Höhe h zusammenfallen.

Wie bringt man sie mit dem Höhenkreis richtig zur Deckung? - Dies erreicht man durch die Verdrehung des Äquatorialsystems um eine Achse, die senkrecht auf der Zeichenebene steht und durch M geht (Abb. 16). Es wird solange gedreht, bis das Gestirn auf dem projizierten Höhenkreis HK liegt. Dann kann man aus diesem Ort auf dem umgeklappten Höhenkreis das Azimuth a nach bekannten Muster ermitteln (lotrechte Linie bis zum Rand des Höhenkreises zum Hilfspunkt $S2$ und Bestimmung des Winkels zwischen der Höhenkreisbasislinie und dem Hilfspunktstrahl). Nach der Verdrehung des Äquatorialsystems gegen die Mittagslinie erhebt sich der Himmelsäquator $H\ddot{A}$ um den Winkel $90^\circ - f$ gegen die Südrichtung. Es lässt sich also nun im verdrehten Zustand die Lage des Himmelsäquators bestimmen, wie in den Abbildung 16 geschehen ist und schließlich auch die Polachse HP einzeichnen, die senkrecht zum projizierten Himmelsäquator verläuft.

Zur Konstruktion des Himmelsäquators $H\ddot{A}$ und der Polachse HP geht man am besten folgendermaßen vor: Man schlägt zunächst einen Kreis um M , der bis zum projizierten Deklinationskreis DK ragt (Abb. 17). Der projizierte Deklinationskreis wird immer diesen zentrischen Kreis ZK tangieren, auch nach der Verdrehung. Ebenso schneidet die gesuchte Polachse HP , die durch M geht, diesen Kreis immer senkrecht. Die durch den Zirkelschlag auf den Höhenkreis ermittelte projizierte Gestirnsposition S' wird jetzt mit M verbunden und die Mitte dieser Strecke $S'-M$ wird als Zentrum für einen Thaleshalbkreis genommen (in Abb. 17 in rot gezeichnet) und M und S' erfasst. Dieser Thaleshalbkreis ermöglicht augenblicklich die Konstruktion der Lage des verdrehten Deklinationskreises und der Polachse HP in einem Schritt. Der verdrehte Deklinationskreis DK' geht nämlich durch S' und den Schnittpunkt SP des Thaleskreises mit dem zentrischen Hilfskreis ZK . Diese Wegstrecke $S'-SP$ (erste Kathete im Thaleskreisdreieck) ist Bestandteil des projizierten und verdrehten Deklinationskreises. Die Strecke von SP zur Mitte M steht gemäß des Lehrsatzes von Thales im rechten Winkel zum Deklinationskreisstück $S'-SP$. Dieses Wegstück (zweite Kathete im Thaleskreisdreieck) verläuft in Richtung der Polachse HP . Mit Hilfe des Thaleskreises und des darin einbeschriebenen rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten im Schnittpunkt SP zusammentreffen, lässt sich demnach die korrekte Projektion der Himmelsphäre in der Aufrissebene auch ohne die Verwendung eines Winkelmessers durchführen.

Von den lösbaren Kombinationen ist nun nur noch die Variante $(a, h, \mathbf{d}) \rightarrow (t, \mathbf{f})$ zu behandeln. Auch hierbei kommt es wieder zur Verdrehung der beiden Koordinatensysteme unter Verwendung eines Thaleskreises.

Die Abbildung 18 zeigt das vollständige Lösungsbild. Die Zeichnung erscheint unübersichtlich, da alle Lösungsschritte darin versammelt sind, aber das Verfahren ähnelt sehr dem zuvor diskutierten Lösungsweg. Die waagerechte Mittelachse ist zunächst wieder Mittagslinie und Himmelsäquator. Die Parallelkreise für h und \mathbf{d} sind bereits ausgeführt und mit Hilfe des umgeklappten Höhenkreises und der Azimuthinformation a wurde bereits der Hilfspunkt $\mathbf{S}2$ und der projizierte Gestirnsort \mathbf{S} im Horizontsystem ermittelt.

Wie konstruiert man die Lage des Deklinationskreises DK ? – Man zeichnet wieder den kleinen Zentralkreis, der im mechanischen Sinn als Lager für die Deklinationskreisverdrehung gedeutet werden kann. Sodann wieder einen Thaleshalbkreis über die Strecke $\mathbf{S}-M$. Das dem Thaleskreis einbeschriebene rechtwinklige Dreieck trifft mit beiden Katheten den Schnittpunkt SP bzw. $M3$ des Thaleskreises und des kleinen Zentralkreises ZK . Die Katheten des rechtwinkligen Thaleskreisdreiecks sind wieder Wegstücke des verdrehten Deklinationskreises DK' und der Polachse HP . Ist die richtige Lage des Deklinationskreises ermittelt, so lässt sich dieser umklappen und nach bekannten Muster der Stundenwinkel aus dem Hilfspunkt $\mathbf{S}3$ ermitteln.

Die in diesem Abschnitt diskutierten Fälle $(t, \mathbf{d}, h) \rightarrow (a, \mathbf{f})$ und $(a, h, \mathbf{d}) \rightarrow (t, \mathbf{f})$ eignen sich zur Bestimmung der geografischen Breite, bzw. zur Zeit- und Azimuthbestimmung. Dabei ist zu beachten, dass es sich bei t um einen Ortstundenwinkel handelt, weil er Bezug auf den Ortsmeridian nimmt. In astronomischen oder nautischen Jahrbüchern findet man Tabellen, in denen z.B. der Greenwicher Stundenwinkel der Sonne für jeden Tag und jede Stunde im Jahr aufgelistet ist. Bestimmt man aus Beobachtungen im lokalen Horizontsystem den Ortsstundenwinkel t , so erhält man aus dem Vergleich mit dem tabellierten Greenwicher Stundenwinkel zur Beobachtungszeit (Grt) die geografische Längendifferenz zu Greenwich: $\mathbf{I} = (t - Grt) \cdot 15^\circ / \text{Stunde}$

Dabei werden östliche Längengrade positiv und westliche negativ gezählt.

Verwendet man eine der Varianten $(\mathbf{f}, t, \mathbf{d}) \rightarrow (a, h)$, $(\mathbf{f}, h, \mathbf{d}) \rightarrow (a, t)$ oder $(t, \mathbf{d}, h) \rightarrow (a, \mathbf{f})$ zur Azimuthbestimmung, so sollte man sich zunächst überlegen, welche in der konkreten Beobachtungssituation das genaueste Ergebnis verspricht.

Eine Azimuthbestimmung, die sich auf eine Höhenmessung bezieht, ergibt nur dann ein genaues Ergebnis, wenn sich die Gestirns Höhe gegen das Azimuth auch deutlich ändert, also z.B. bei den Auf- und Untergängen auf der Ost- und Westseite des Himmels bei geringeren und mittleren geographischen Breiten. Im Bereich des Meridians ändert sich die Höhe kaum bei der Wanderung des Gestirns und deshalb lässt sich in diesem Fall einer bestimmten Höhe ein großer Bereich von Azimuthwerten zuordnen, je nach der Fehlertoleranz der Höhenmessung. Steht das angepeilte Gestirn in Meridiannähe, zu wählt man besser die Zeit-Azimuth-Methode $(\mathbf{f}, t, \mathbf{d}) \rightarrow (a, h)$, denn dann werden in kurzen Zeiträumen viele Azimuthgrade überstrichen. Eine genaue Bestimmung von t mittels der Zeitbestimmung mit einem Chronometer, den Angaben Grt im nautischen Jahrbuchs und der bekannten Längengraddifferenz zu Greenwich ermöglicht dann eine sehr genaue Bestimmung des Gestirnsazimuthes zum Zeitpunkt der Messung.

Anwendung des zeichnerischen sphärischen Rechnens auf den Bauplan von Stonehenge

Der Grundriss und die Steinsetzungen der steinzeitlichen Anlage von Stonehenge zeigen auffällige Übereinstimmungen mit Zeichnungselementen des grafischen sphärischen Rechnens (Abb. 19). Es gibt einen äußeren Kreis aus 56 Löchern, den sog. „Aubry-Kreis“, das Stationsviereck aus vier am Kreisrand befindlichen Steinen, dessen Längsseiten als projizierte Deklinationskreise angesehen werden können, einen Steinkreis („Sarsenkreis“), der an den kleinen zentrischen Kreis *ZK* erinnert und eine Symmetrieachse, die senkrecht auf den Längsseiten des Stationsvierecks steht und durch die Kreismitte geht und damit an die Polachse *HP* erinnert. Sollte im Bauplan von Stonehenge das mathematische Prinzip, die Himmelskugel durch Projektionen und Umklappungen in einer Ebene darzustellen, baulich verwirklicht worden sein?

Auffälligstes astronomisches Merkmal von Stonehenge ist die Ausrichtung der Symmetrieachse des Bauwerks auf die Aufgangsrichtung der Sonne am Tag der Sommersonnenwende. Diese Richtung ist durch eine ca. 500 m lange Prozessionsstraße aus zwei parallelen Gräben besonders markant und genau in der Landschaft gekennzeichnet. Ihr Nordazimuth beträgt $49,6^\circ$ und sie zielt auf den Landschaftshorizont, der in einer Höhe von ca. $0,5^\circ$ verläuft.

Und auch das Stationsviereck gibt Anlass, über eine astronomische Funktion der Anlage zu spekulieren. Die kurzen Seiten sind auf die Sonnenwenden ausgerichtet (Aufgang der Sommersonne und Untergang der Wintersonne), während die langen Seiten die extremalen Mondorte am Horizont kennzeichnen (Aufgang des südlichsten Mondes und Untergang des nördlichsten Mondes). In der Rechtwinkligkeit dieses Vierecks kann man einen möglichen Grund für die Errichtung der Anlage auf dem 51. Breitengrad erblicken, denn nur dort stehen die Sonnen- und Mondwenderichtungen senkrecht zueinander.

Ein weiteres Indiz für die Auszeichnung des 51. Breitengrades lässt sich in der goldenen Bush-Barrow-Raute erkennen, die in ca. 1 km Entfernung von Stonehenge in einem der zahlreichen Grabhügel gefunden wurde (Abb. 20). Sie weist Innenwinkel von 80° und 100° auf. Diese Winkel entsprechen etwa dem maximalen Pendelbogen der Sonne (80°) und des Mondes (100°) auf dem Ost- und Westhorizont.

Bringt man die Raute in die Horizontalebene und nordet sie ein, so zeigen die vier Kanten auf die Sonnenwenden, wenn die kurze Diagonale auf der Mittagslinie liegt, und auf die Mondwenden, wenn die lange Diagonale auf der Mittagslinie liegt. Nur auf der geografischen Breite von 51° kann eine Raute in einer Doppelfunktion alle acht Richtungen der Sonnen- und Mondwenden darstellen. Dass beide Argumente miteinander verwandt sind, sowohl die Rechtwinkligkeit des Stationsvierecks als auch die Doppelfunktion der $80^\circ/100^\circ$ -Raute, zeigt sich darin, dass es verschiedene Möglichkeiten gibt, die eingenordete Raute sinnvoll in den Bauplan von Stonehenge einzupassen.

Ein von diesen älteren Betrachtungen unabhängiges Argument für die Auszeichnung des 51. Breitengrades führt A. Chechelnitsky an [Great Belt of Megalithic Observatories and Problem of a History of the Pole of the Earth; Dubna 2000, Preprint <http://arXiv.org/physics/0104017>]. Er behauptet, viele megalithische Bauwerke mit astronomischer Funktion seien deshalb dort errichtet worden, weil dann das Aufgangszimuth der Sommersonne dem Breitengrad f gleicht (f entspricht auch der Polhöhe; das ist der Winkel zwischen dem Himmelspol und dem Horizont). Chechelnitsky nennt dies die „ $A = f$ –Symmetrie“. Mit A ist dabei das von Nord in Richtung Ost gemessene Azimuth gemeint.

Ein Vergleich der für Stonehenge gültigen Werte von $f = 51,17^\circ$ Nord und $A = 49,6^\circ$ (Nordazimuth der Prozessionsstraße) demonstriert diese ungefähre Übereinstimmung und den

Grad der Genauigkeit. Chechel'nitsky lässt auch Beispiele gelten, die um mehrere Breitengrade von $f = 51^\circ$ abweichen.

Aus seiner Beispielsammlung ist eine weltweite Ballung vergleichbarer Orte auf diesem Breitengrad aber nicht wirklich ersichtlich. Der Nachweis, dass auf anderen Breitengraden deutlich weniger archäoastronomisch interessante Stätten zu finden sind, fehlt auch.

Wendet man aber seine interessante Spekulation, Stonehenge sei nach Maßgabe der $A = f$ -Symmetrie in der Salisbury Plain nahe des 51° Breitengrades errichtet, auch als Eingangsvoraussetzung für die Zeichnung einer dementsprechenden Himmelskugel mit den hier behandelten Zeichenmethoden an, so kommt man zu einer wirklich eleganten und verblüffenden Lösung, die in der umfangreichen Literatur über die astronomische Deutung von Stonehenge bislang nicht zu finden ist. Der Bauplan von Stonehenge gleicht in seinen wesentlichen Zügen der in die Ebene gebrachten Himmelskugel bei den geforderten Voraussetzungen $d = 24^\circ$ (Sommersonnenwende), $h = 0$ (Horizontbeobachtung) und $A = f$! Dies soll nun schrittweise entwickelt und erläutert werden.

Deutet man den Aubry-Kreis als den Meridiankreis der Himmelskugel und die Längsseiten des Stationsvierecks als projizierte Deklinationskreise, so lassen sich unmittelbar die dargestellten Deklinationen ablesen (Abb. 19). Sie liegen mit $\pm 22^\circ$ nahe bei den solaren Extremaldeklinationen von ca. $\pm 24^\circ$ (2000 v. Chr.), für die hier die Rechnung erfolgen soll. Wie ist nun eine Zeichnung aufzubauen, die der $A = f$ -Symmetrie für die solare Maximaldeklinaton von $+24^\circ$ genügt? - Zur schrittweisen Veranschaulichung des Lösungsweges werden zunächst die Aufgangssazimuthe der Sommersonne auf den Breitengraden 40° und 60° zeichnerisch ermittelt. Die Abbildung 21 zeigt die Lösung für $f = 40^\circ$ und Abbildung 22 die entsprechende Lösung für $f = 60^\circ$. In Abbildung 21 steigt der Hilfspunktstrahl steiler auf als die Polachse, in Abbildung 22 ist es umgekehrt. Aus diesen zwei Zeichnungen ist schon ersichtlich, wie die Lösung der $A = f$ -Symmetrie aussehen muss: Die Polachse $M-HP$ und der Hilfspunktstrahl von M nach S_2 fallen zusammen. Durch Ausprobieren findet man heraus, dass es für $d = +24^\circ$ auf der geografischen Breite von $f = 50,4^\circ$ genau passt (Abb. 23).

Bei der Konstruktion dieses Ergebnisses macht man sich wieder den Thaleskreis zunutze. Der Strahl vom Hilfspunkt S_2 zum Horizontort S der Sonne in Abbildung 23 steht senkrecht auf der Mittagslinie. Der in die Aufrissebene projizierte Sonnenort S befindet sich damit am rechten Winkel eines Thaleskreisdreiecks, dessen andere Eckpunkte M und S_2 sind. Das Polachsenstück von M nach HP ist die Hypothenuse dieses Dreiecks. Der Thaleshalbkreis wird über diese Hypothenuse gezeichnet und erfasst M und S_2 . Die Abbildung 24 zeigt das Lösungsbild in der richtigen Vorgehensweise. Man geht vom bekannten Deklinationskreis für $d = 24^\circ$ aus, bestimmt die Mitte zwischen M und HP , setzt dort den Zirkel für den Thaleshalbkreis an und bestimmt den Schnittpunkt des Halbkreises mit dem projizierten Deklinationskreis. Dann zeichnet man die Katheten des Thaleskreisdreiecks ein und erhält die gesuchte Mittagslinie unter der Voraussetzung $A = f$ als kurze Kathete des Dreiecks.

Zur rechnerischen Bestimmung von $A = f$ muss man einige Dreiecke in Abbildung 24 auswerten:

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{1}, \text{ mit } x = \sin d; y = \cos A = \cos f; \cos A = \cos f = x / y = \sin d / \cos f$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 f = \sin d$$

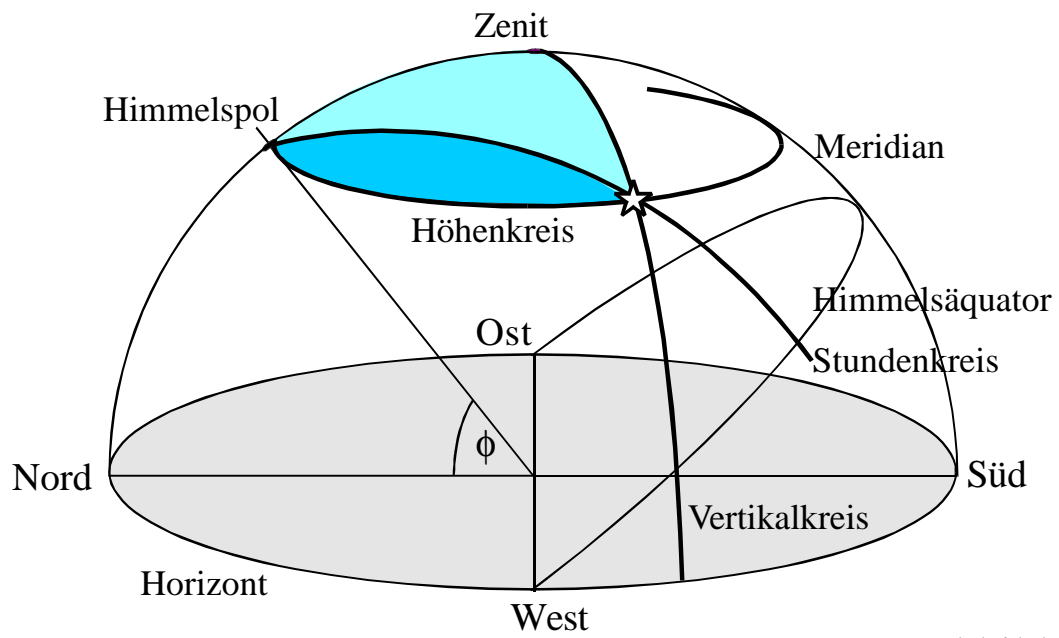
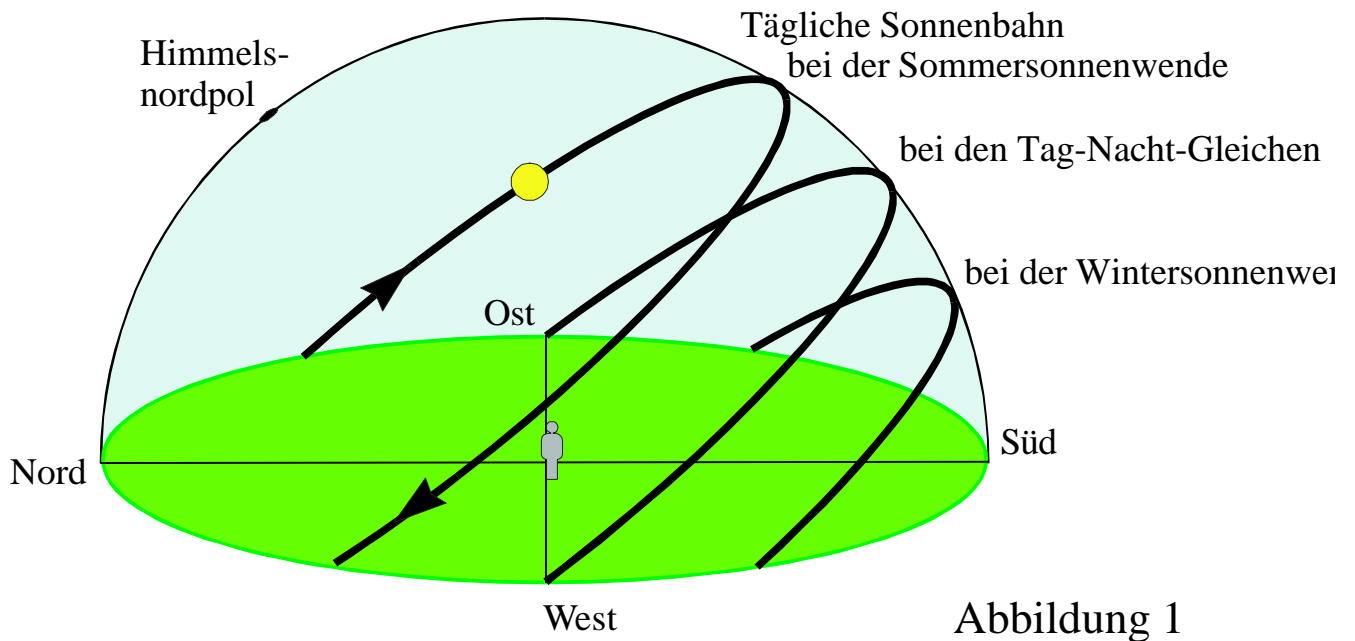
Setzt man $d = 24^\circ$ ein und löst nach f auf, so erhält man ebenfalls die Lösung $A = f = 50,4^\circ$.

Erstaunlicherweise passt diese Zeichnung fast genau auf den Plan von Stonehenge, wenn man sie in geeigneter Weise mit ihm zur Deckung bringt. Die Mittagslinie $N-S$ der Zeichnung in Abbildung 23 wird dazu durch Drehung um 90° in die senkrechte Richtung befördert (weil auf Karten Norden meistens oben ist) und der Himmelspol durch eine anschließende Spiegelung an der nun senkrecht stehenden Achse $N-S$ mit der Aufgangsrichtung der Sommersonne (der Richtung der Prozessionsstrasse) zur Deckung gebracht. Der Zenit Z zeigt dann in die Ostrichtung. Die Abbildung 25 zeigt die Überblendung der Zeichnung mit dem eingeordneten Plan von Stonehenge. Der Schnittpunkt des Thaleskreises mit dem projizierten Deklinationskreis liegt auf einem weiteren Steinring, der heute nicht mehr steht. Das rechtwinklige Dreieck im Thaleshalbkreis lässt sich bei Spiegelung an den beiden Katheten noch zu einer Raute vom Bush-Barrow-Typ erweitern (in Abb. 25 in goldgelb gezeichnet).

Allerdings deutet der Bauplan auf eine Sonnendeklination von nur ca. 22° hin und der Winkel zwischen der Nordrichtung und der Zenitachse (die Senkrechte auf den projizierten Deklinationskreisen) beträgt ca. $51,7^\circ$. Diese Richtung fällt nicht mehr genau mit der Prozessionsstrasse zusammen, der eigentlichen Richtung des Sonnenaufgangs, sondern mit dem Heelstone, der den Vorbeizug der Sommersonne in etwas größerer Höhe peilt. Die Winkel passen also nicht perfekt zusammen und die $A = f$ -Symmetrie ist nicht exakt erfüllt. Das Bauwerk realisiert die Idealverhältnisse nur innerhalb gewisser Toleranzen. Im Bereich dieser Toleranzen von ca. 2° liegen auch die Effekte der Lichtbrechung und der Elevation des Landschaftshorizontes, die bei der zeichnerischen Lösung der bemerkenswerten $A = f$ -Symmetrie nicht berücksichtigt wurden.

Referenzen

Der Verfasser wurde durch die Schulaufzeichnungen von Dr. Herbert Römer (Bonn) aus dem Ende der 40er Jahre, als dieses Thema noch Bestandteil des Abiturs war, zu einer Beschäftigung mit dieser fast verschollenen Art des zeichnerischen Rechnens angeregt, wofür Herrn Dr. Römer an dieser Stelle besonders gedankt sei. Die zeichnerische und rechnerische Lösung für die Gestalt der Himmelskugel bei der „ $f = A$ -Symmetrie“ entwickelte Daniel Brown, Universität Liverpool.



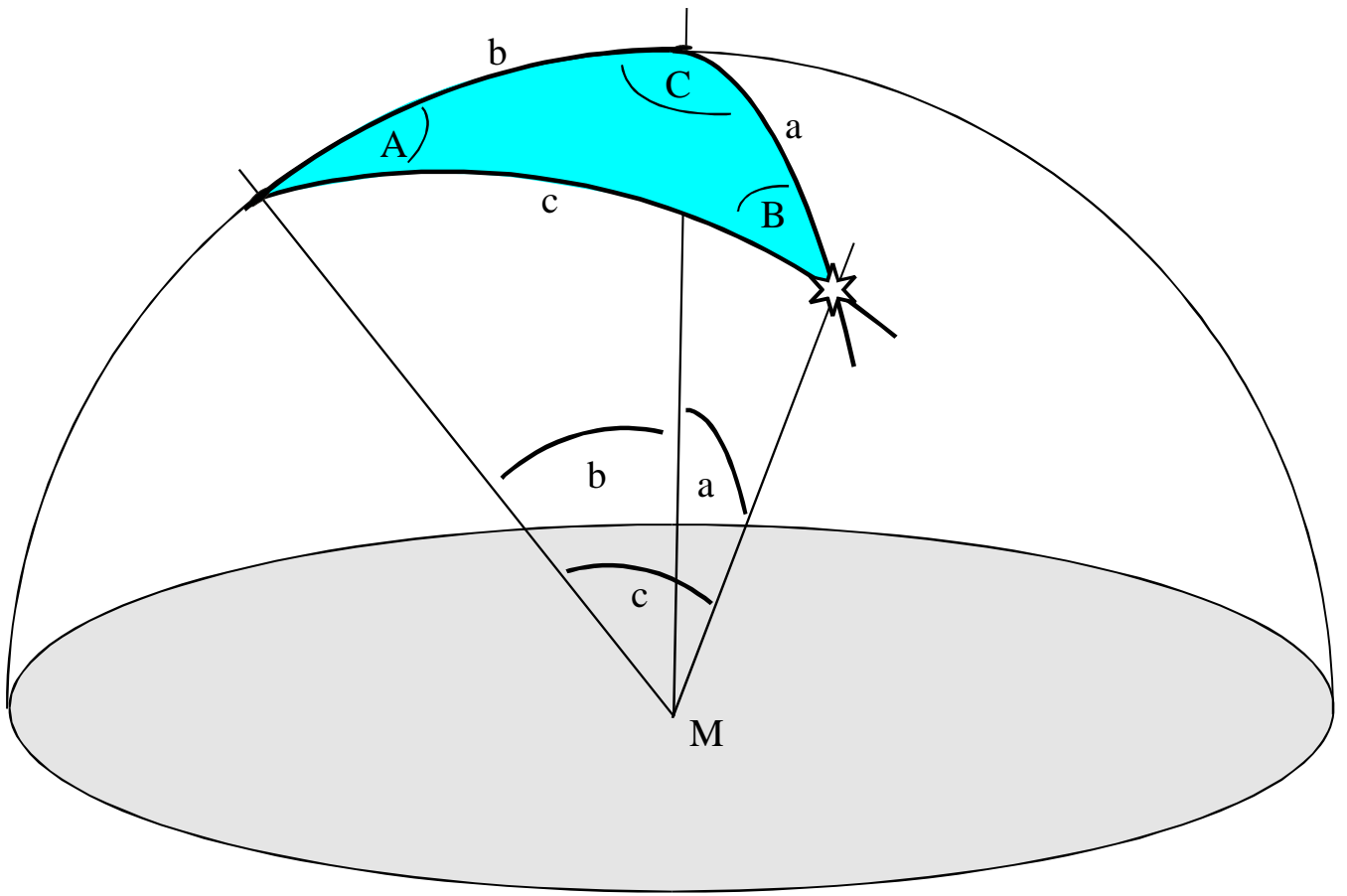
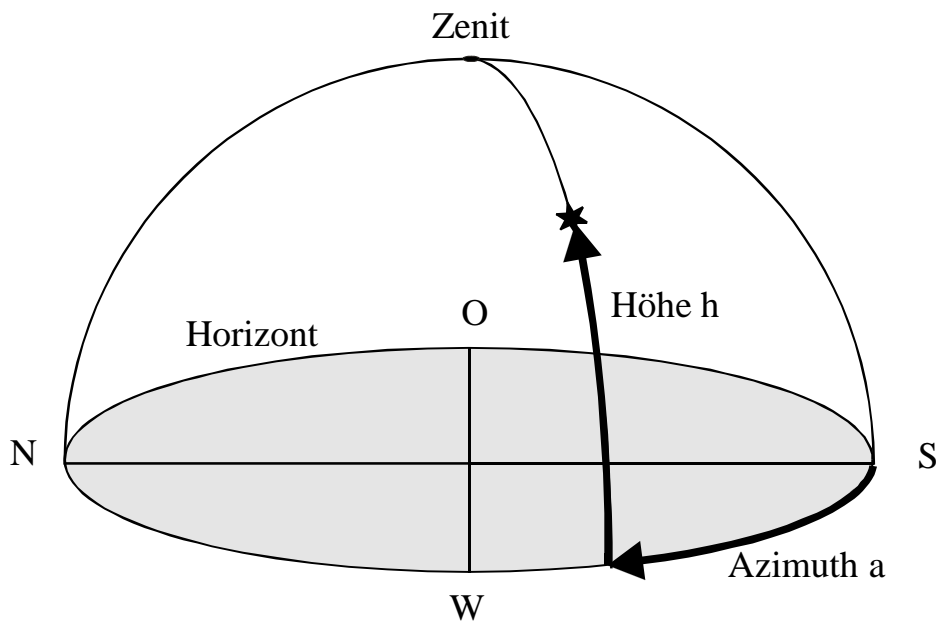
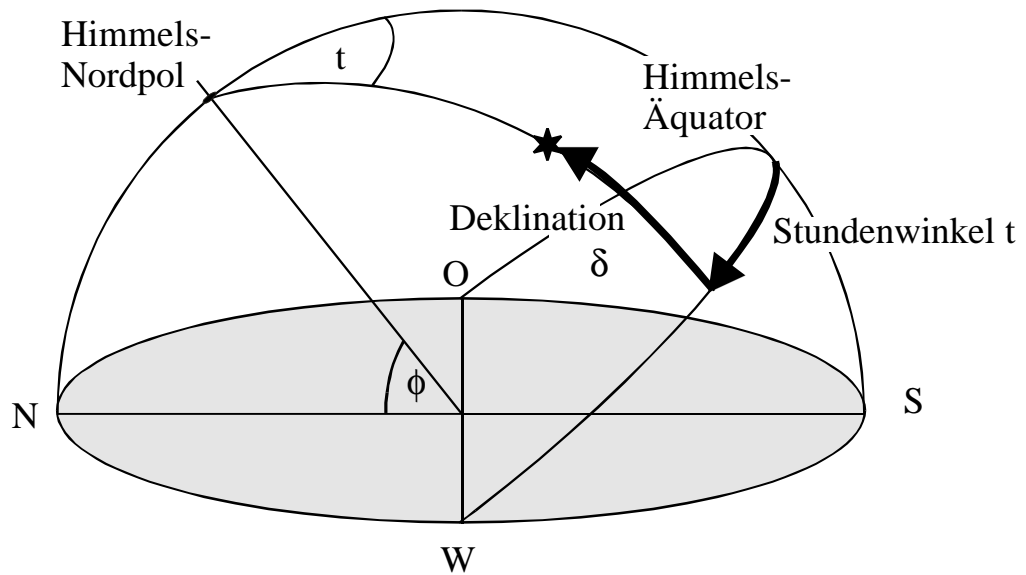


Abbildung 3



Koordinaten im Horizontsystem: Azimuth und Höhe

Abbildung 4



Koordinaten im Horizontsystem: Stundenwinkel und Deklination

Abbildung 5

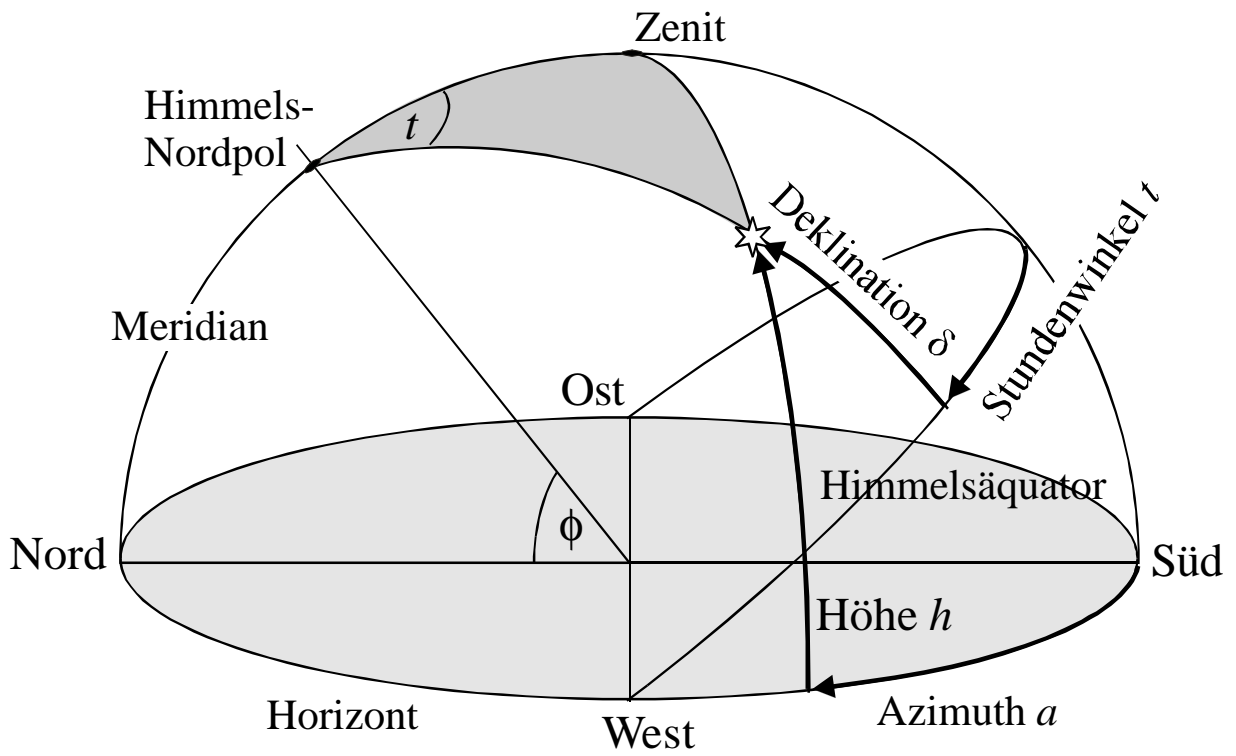


Abbildung 6

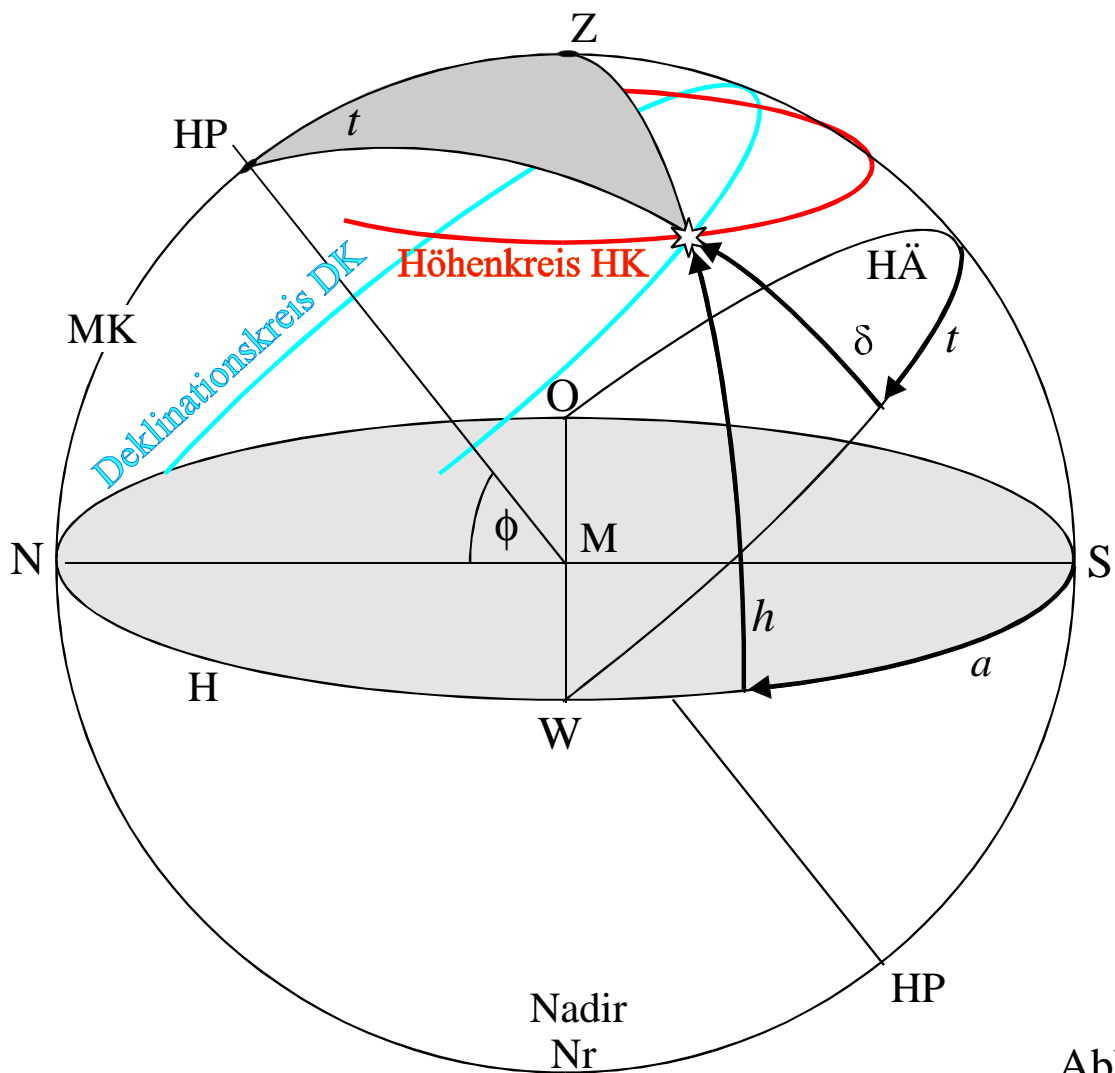


Abbildung 7

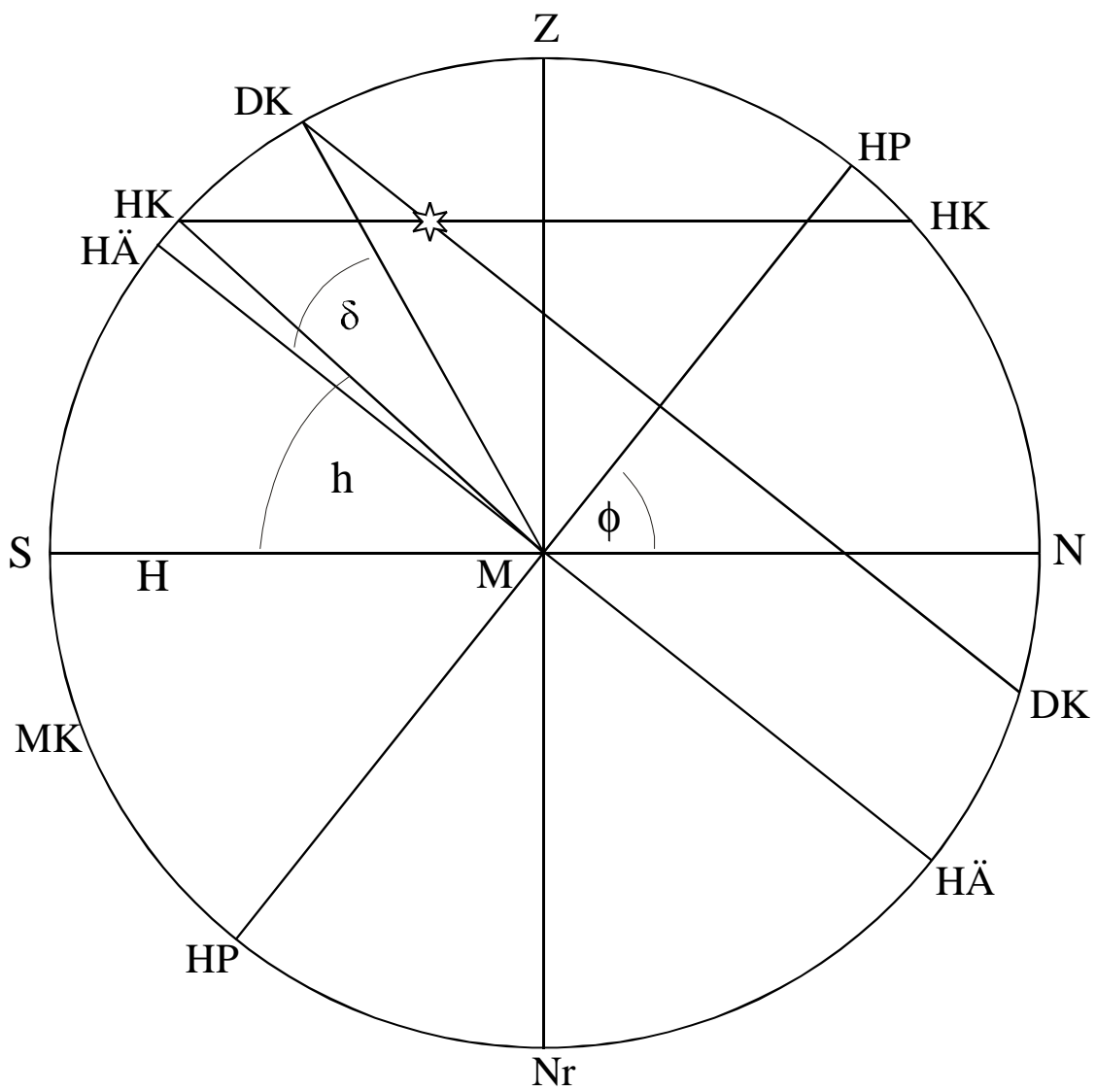


Abbildung 8

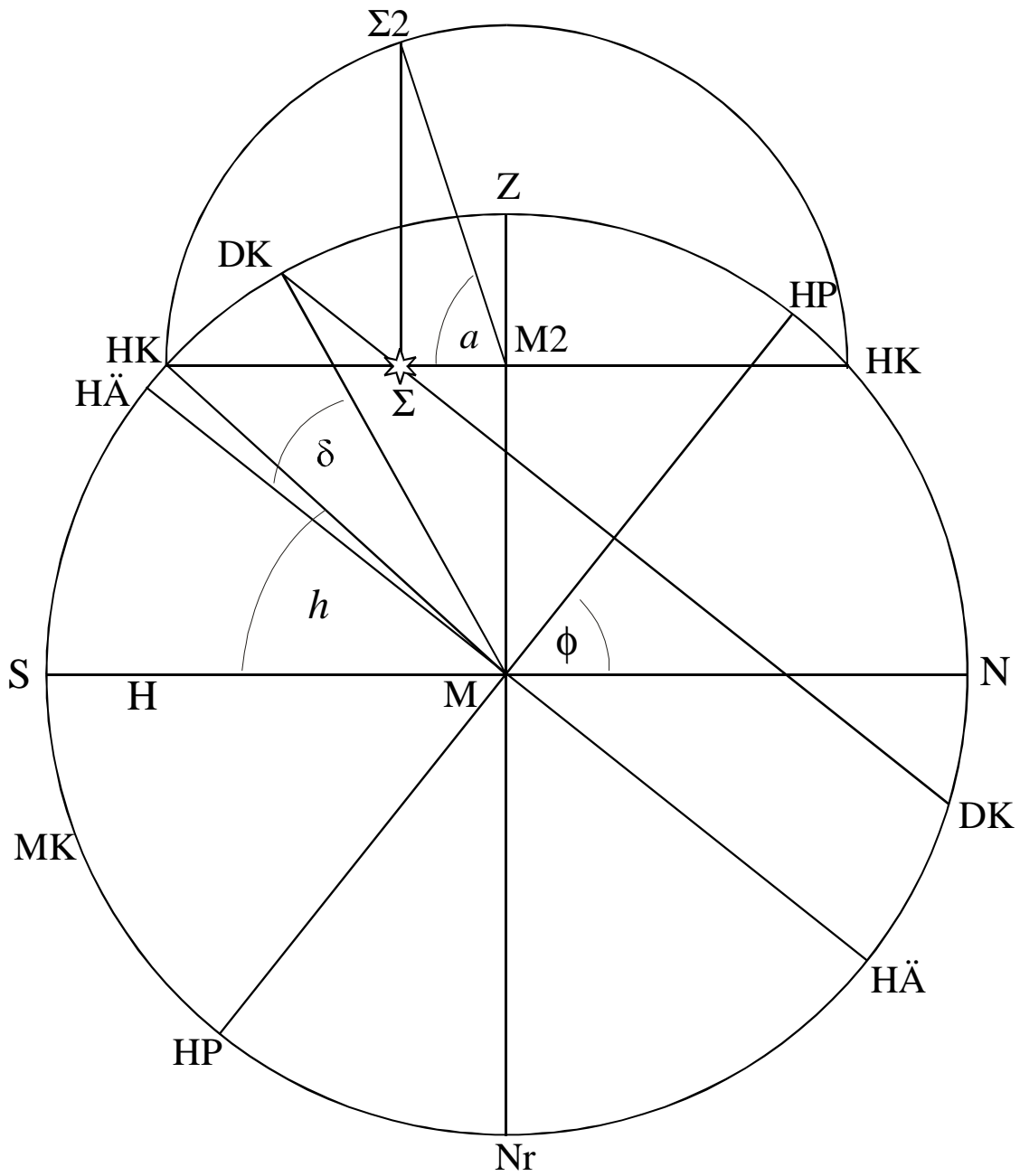


Abbildung 9

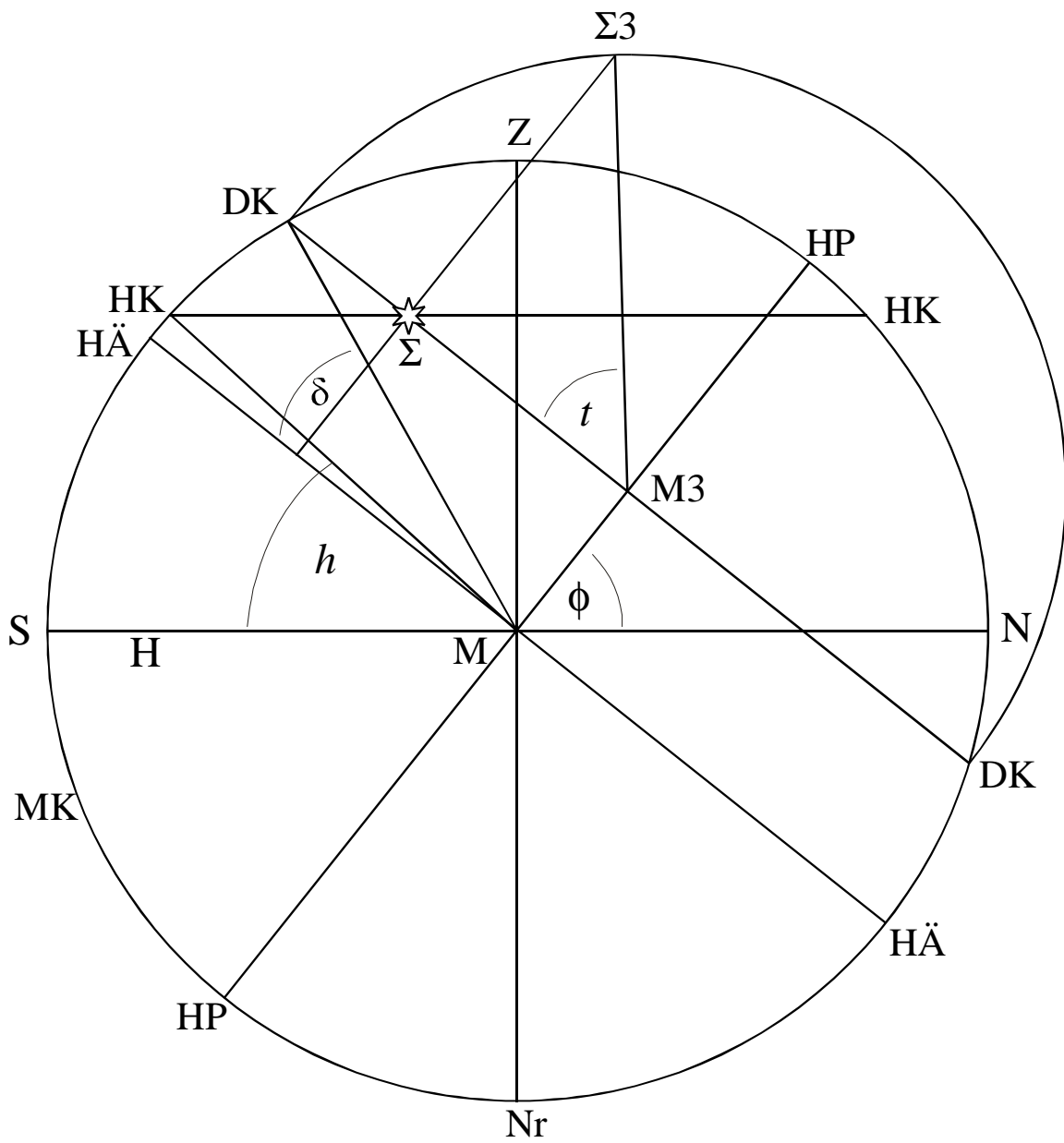


Abbildung 10

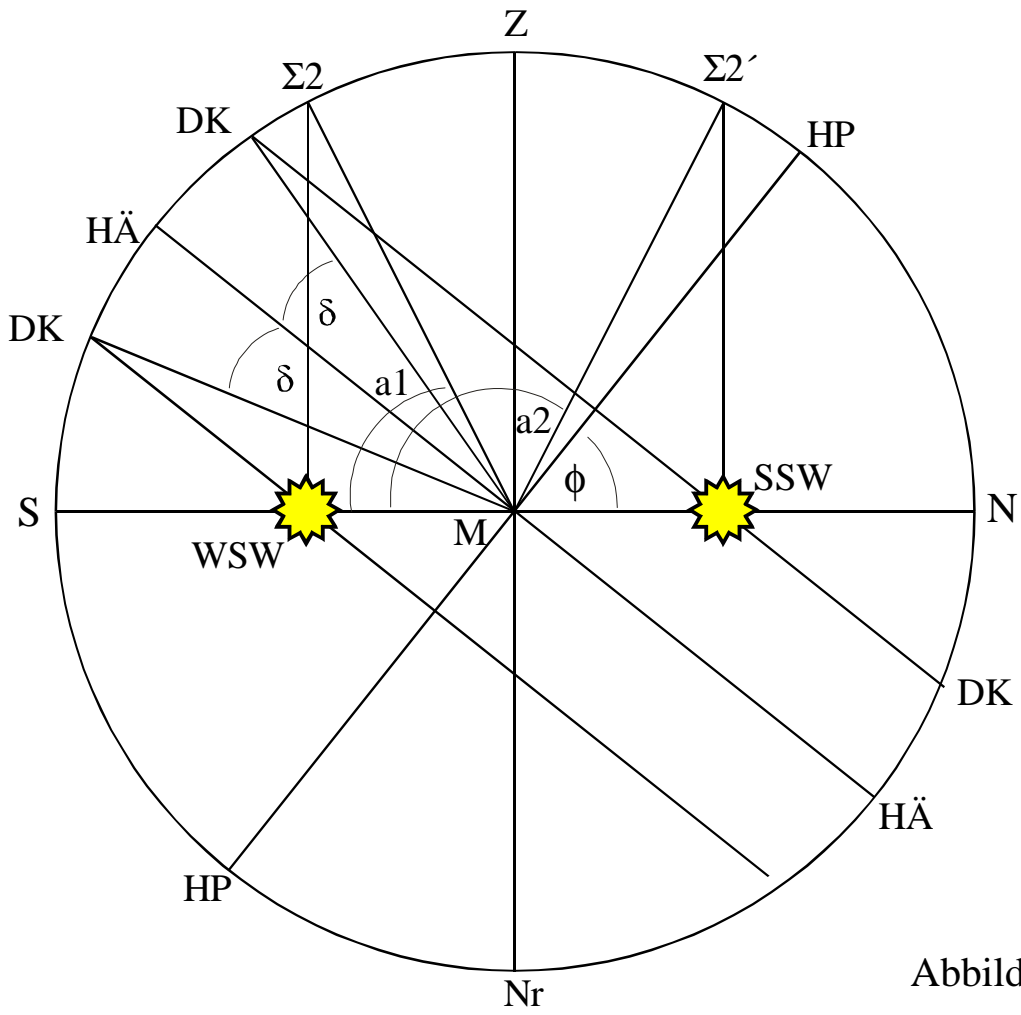


Abbildung 11

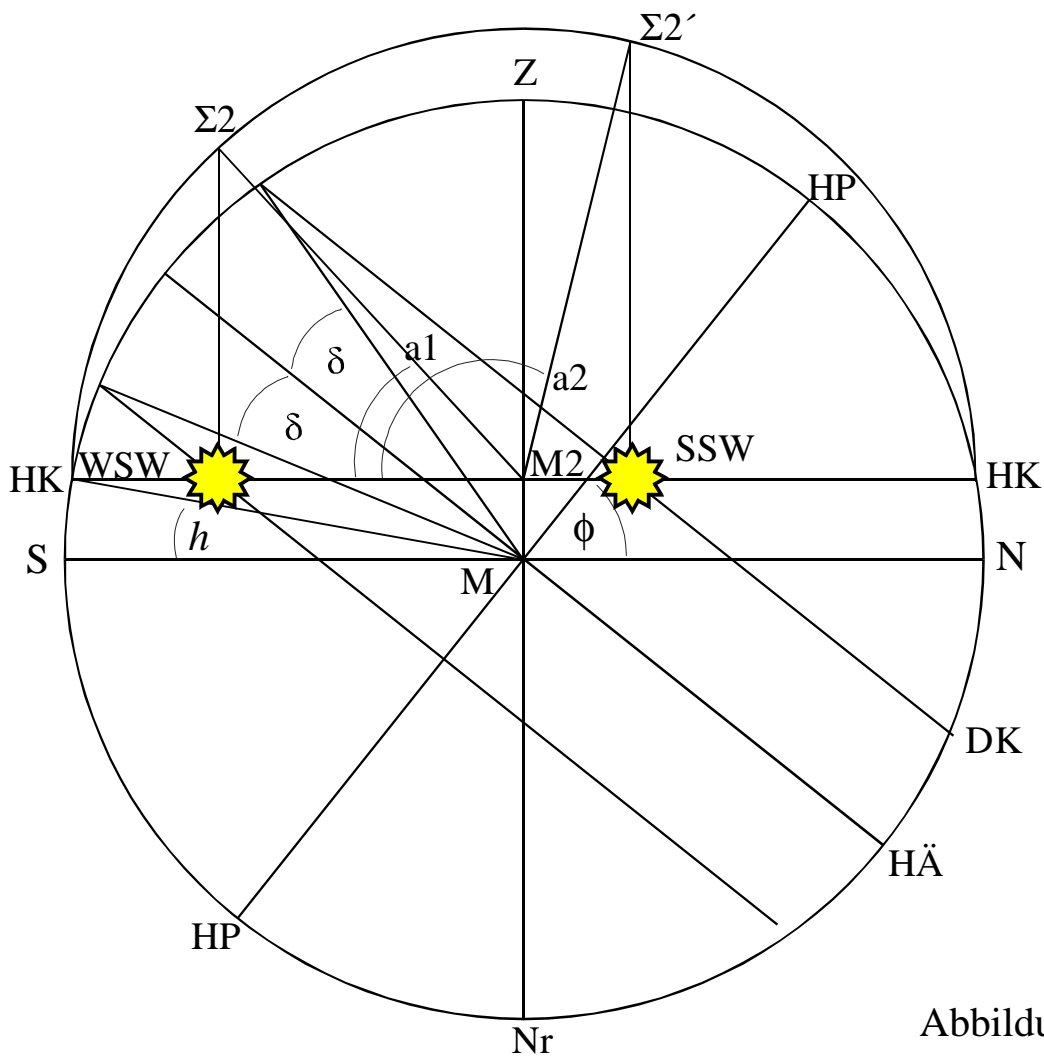


Abbildung 12

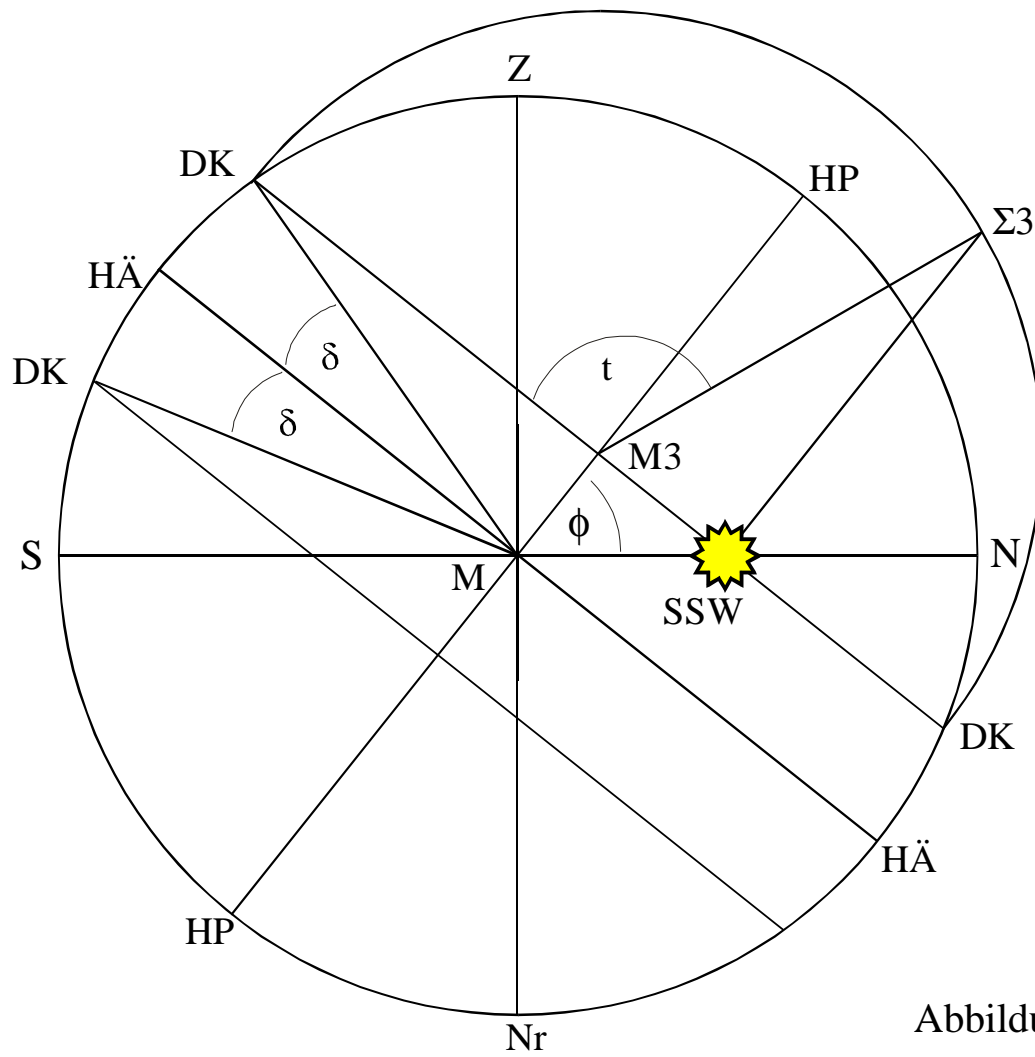


Abbildung 13

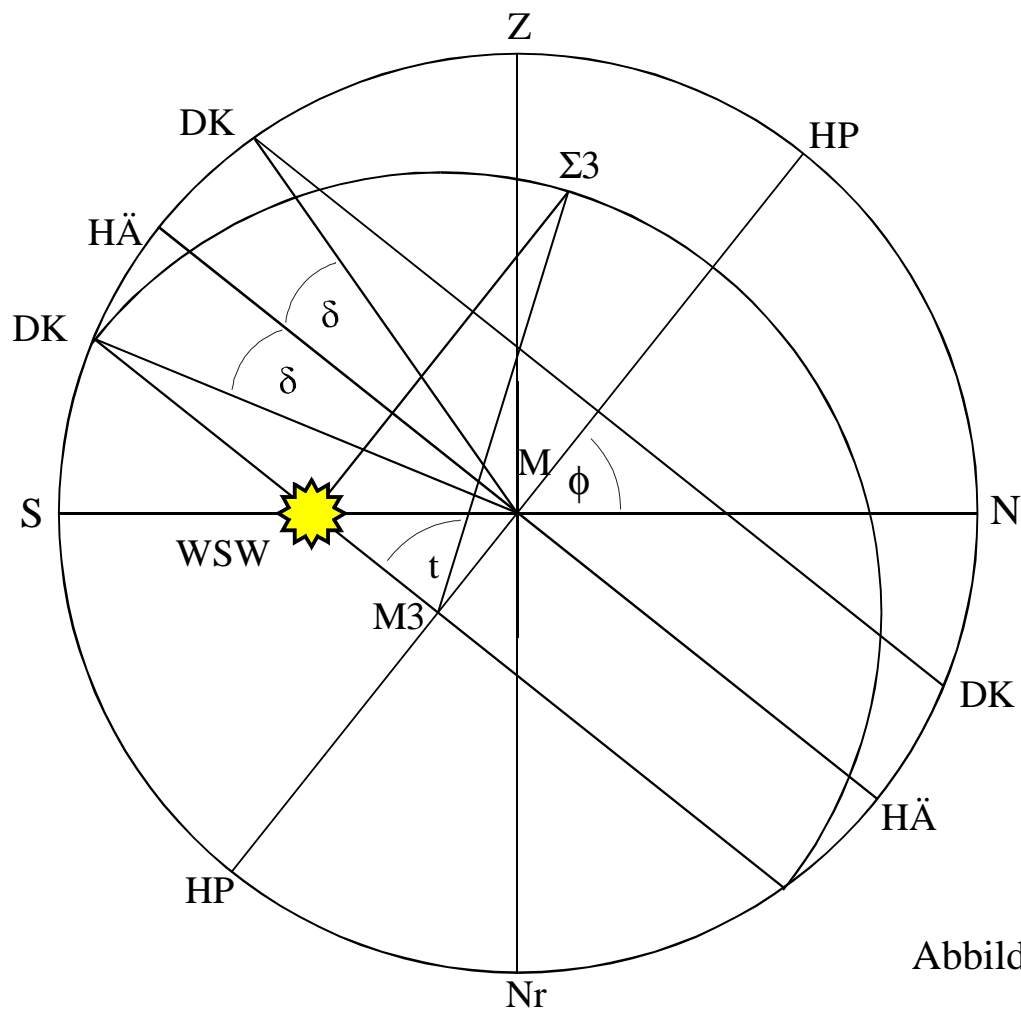


Abbildung 14

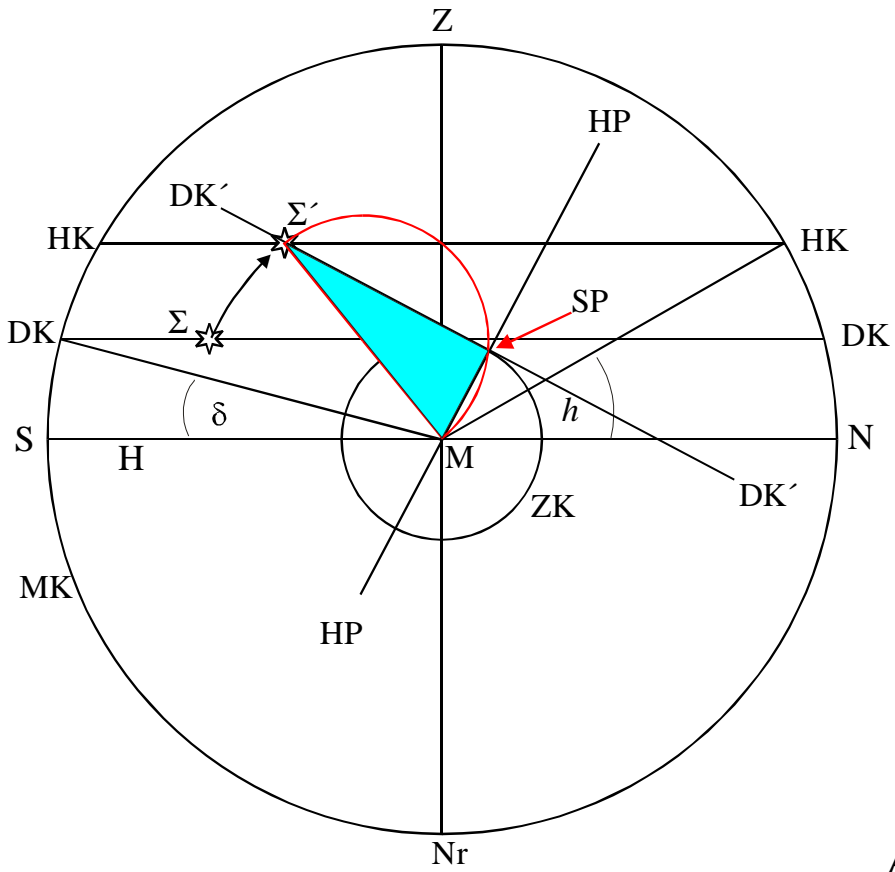


Abbildung 17

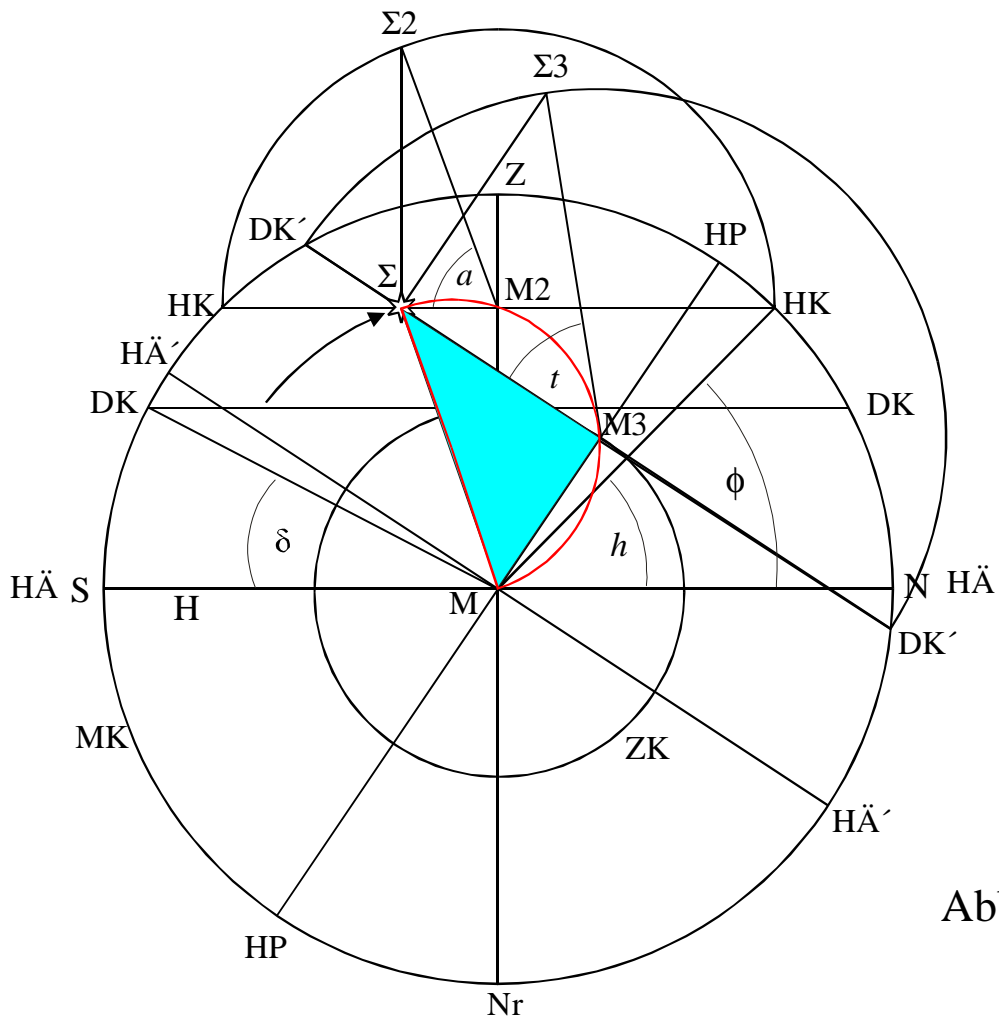
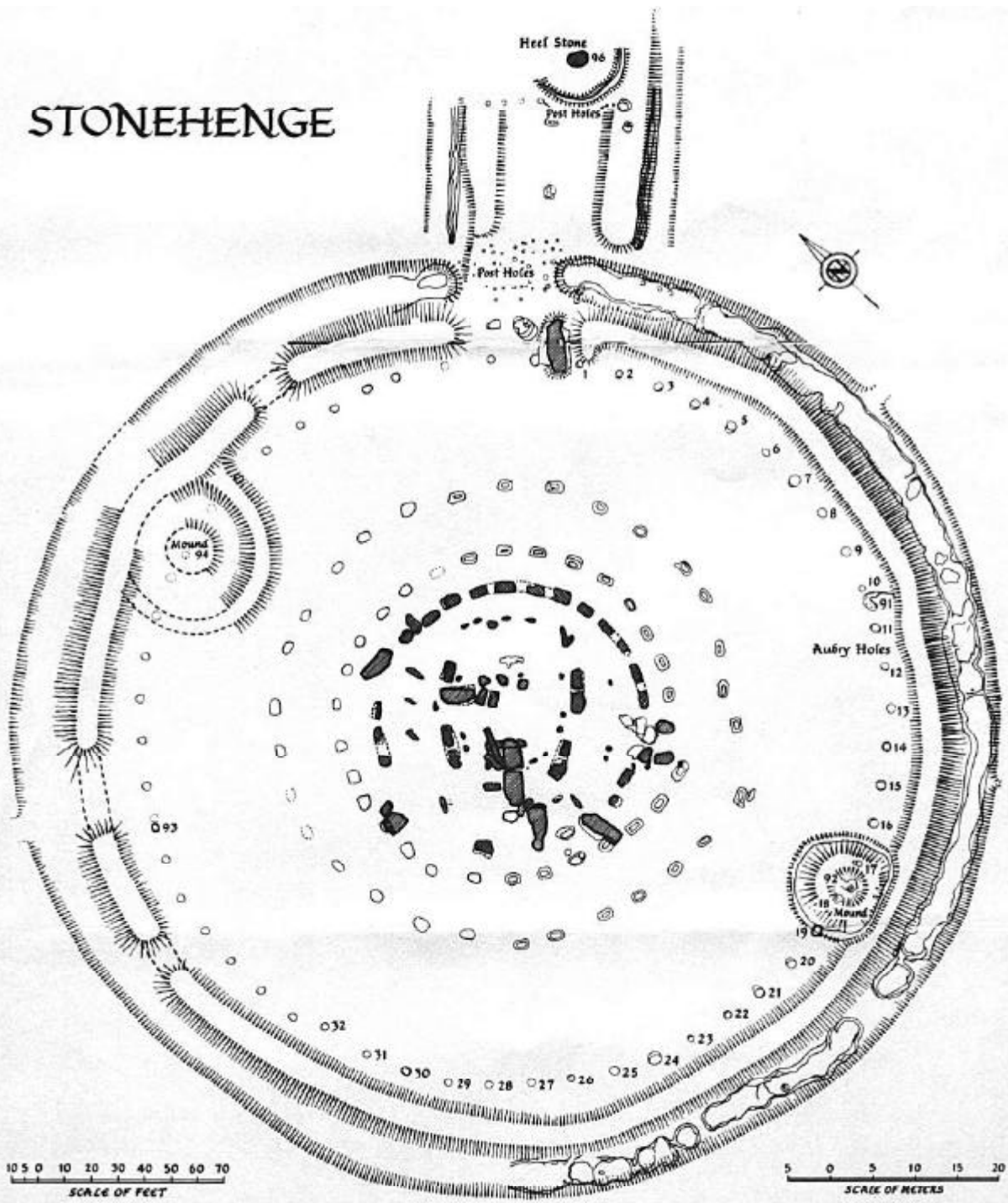


Abbildung 18

STONEHENGE



The Official Ground Plan of Stonehenge

(Courtesy of the Controller of Her Britannic Majesty's Stationery Office, British Crown Copyright.)

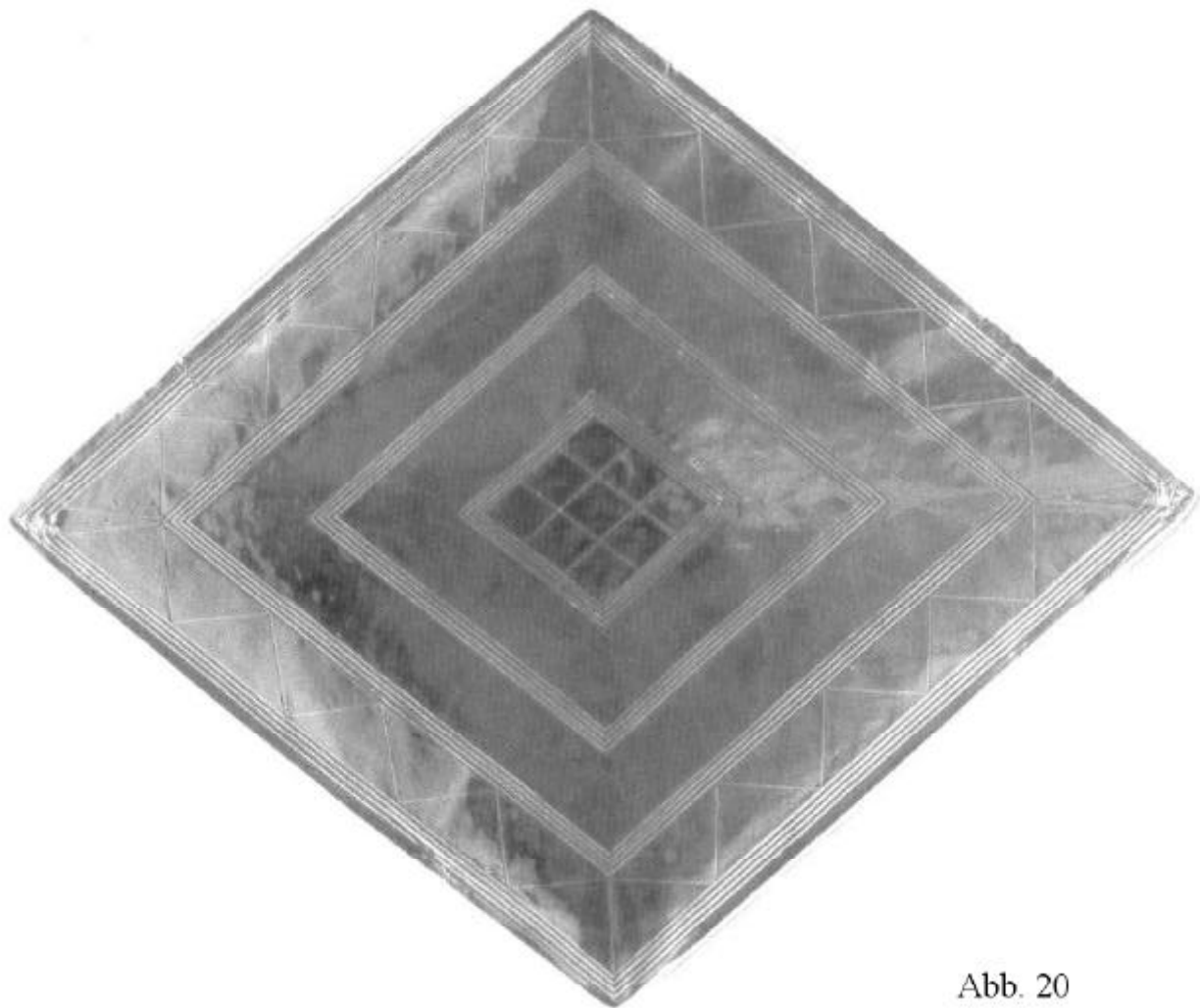


Abb. 20

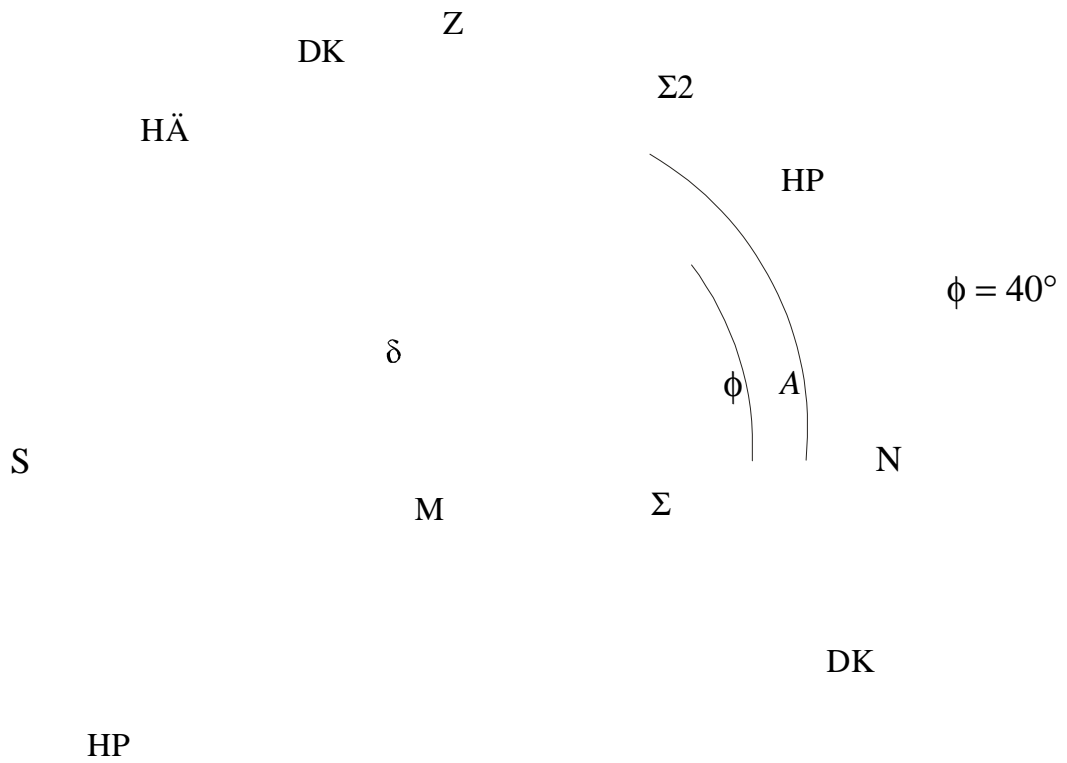


Abbildung 21

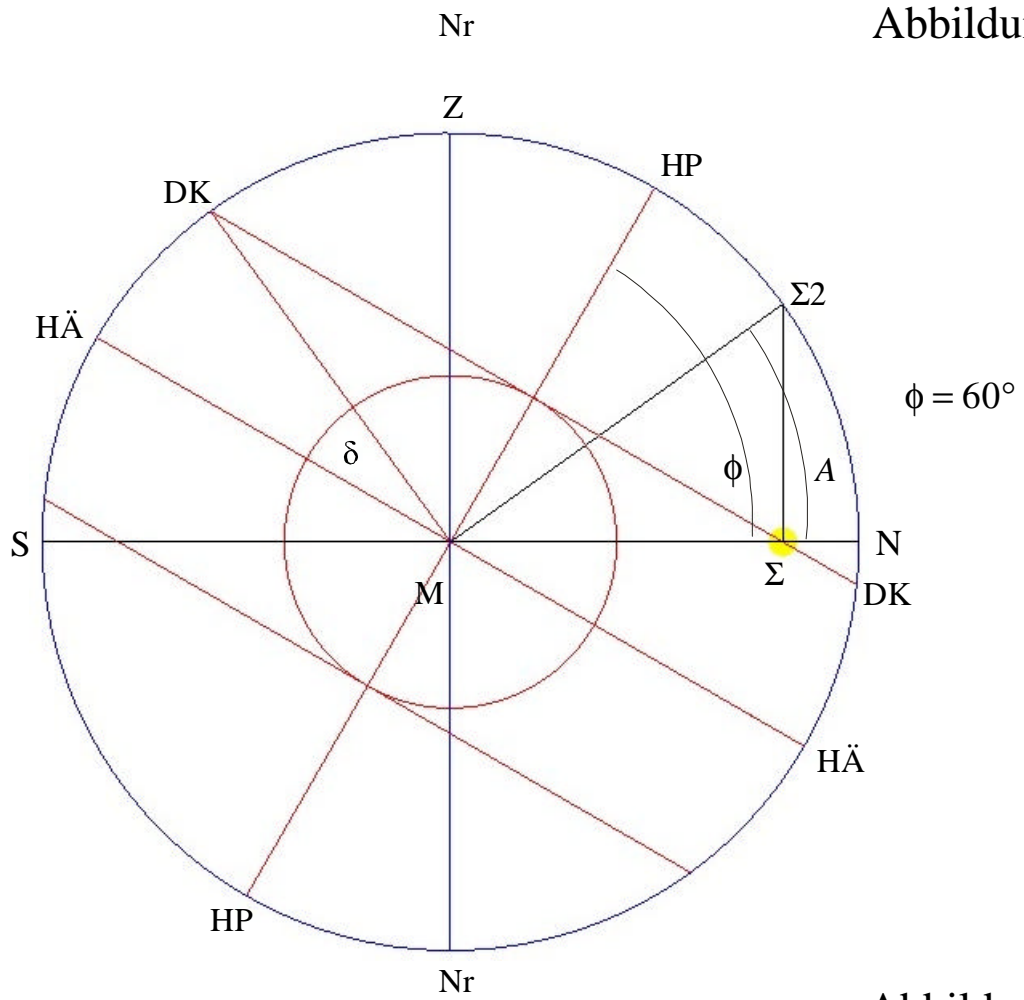


Abbildung 22

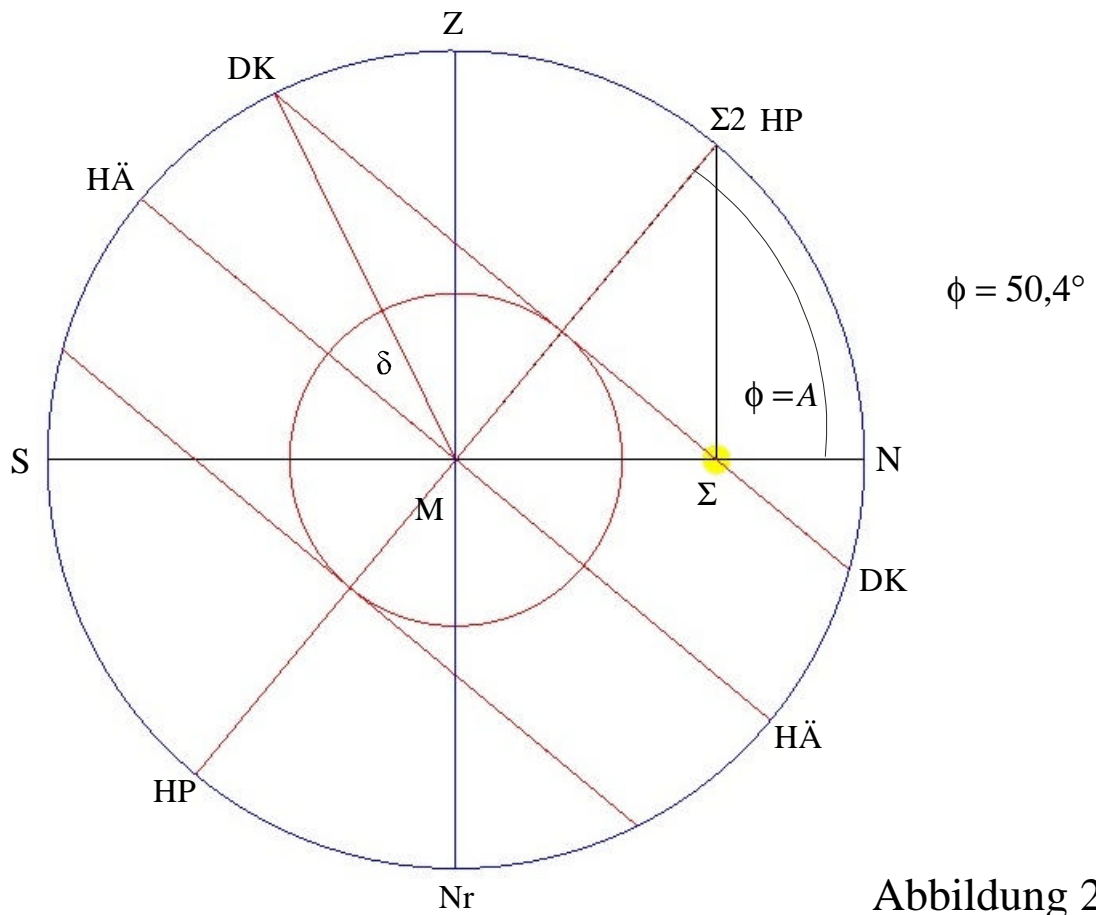


Abbildung 23

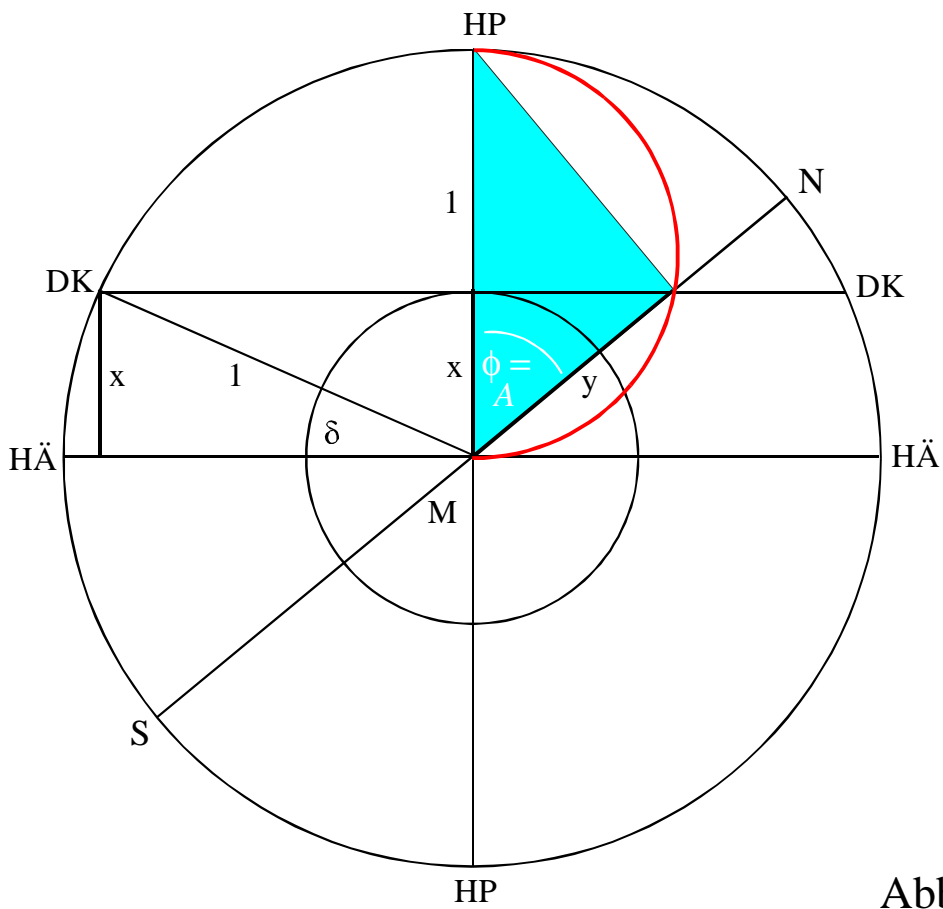


Abbildung 24

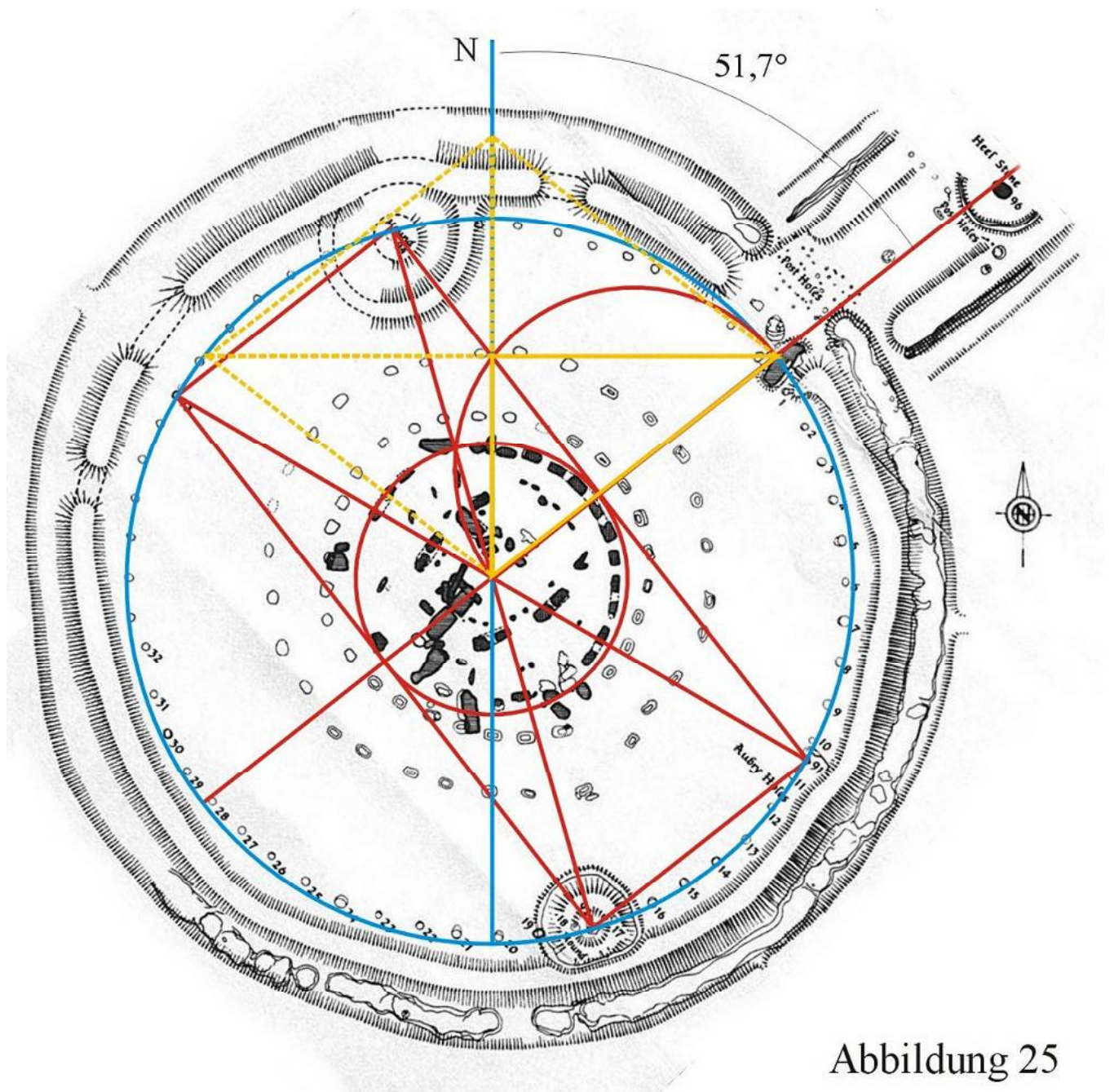


Abbildung 25