

Sternzeit

Im bürgerlichen Leben richten wir uns nach dem Sonnenlauf, denn die Sonne bestimmt als Tagesgestirn den beständigen Wechsel von Licht und Dunkel. Bei genauerer Betrachtung zeigt sich jedoch, dass die wahre, am Himmel sichtbare Sonne nicht immer genau 24 Stunden für einen Umlauf an der Himmelskugel benötigt. Die Ursachen für diese Anomalie in der Sonnenbewegung liegen in der Schiefelage der Ekliptik zur Äquatorebene und in der ungleichförmigen Wanderung der Erde auf einer Ellipsenbahn begründet. Diese Effekte werden unter der Bezeichnung „Zeitgleichung“ oder „Zeitangleich“ zusammengefasst. Unser bürgerlicher Zeitablauf ignoriert die astronomisch bedeutsamen Feinheiten der scheinbaren Sonnenbewegung, denn der 24-Stunden-Tag basiert auf dem täglichen Umlauf einer „mittleren Sonne“ um die Himmelskugel. Genau 24 Stunden „mittlere Sonnenzeit“ benötigt diese gedachte Sonne, um den Meridian in unterer Stellung im Norden wieder zu passieren. Da die Sonne täglich um ca. 1° ($360^\circ/365,2422$) auf der Ekliptik wandert, steht bei jeder unteren Kulmination der Sternhimmel in anderer Lage an der Sphäre als noch am Tag zuvor. Es dauert dann noch rund 4 Minuten, bis sie wieder im Meridian steht, wenn ein Stern, der am Vortag zum Zeitpunkt der unteren Kulmination die gleiche Rektaszension wie die Sonne aufwies, diesen wieder überschreitet. Folglich sind Stern- und Sonnentag zu unterscheiden. Der Sterntag ist kürzer als der Sonnentag, und zwar genau um $4\text{min} \cdot (360/265,2422) = 3\text{min } 57\text{ sec}$; gerechnet in Sonnenzeit. Üblich ist die Einführung eines neuen Zeitmaßes für den Sterntag. Er ist die Zeitspanne zwischen zwei oberen Kulminationen eines festen Punktes der Sphäre. Der Sterntag wird in 24 Stunden Sternzeit unterteilt. man darf diese Zeitangabe nicht mit der Sonnenzeit verwechseln; der Sterntag ist kürzer als der Sonnentag, auch wenn beide von 0 bis 24 Uhr gezählt werden. Der himmelsfeste Bezugspunkt der Sternzeitählung ist wie bei der Rektaszensionszählung der Frühlingspunkt.

Sonnentag	Zeitspanne zwischen zwei aufeinanderfolgenden unteren Kulmination der mittleren Sonne	24 Stunden Sonnenzeit
Sterntag	Zeitspanne zwischen zwei aufeinanderfolgenden oberen Kulmination des Frühlingspunktes	24 Stunden Sternzeit

Tabelle: Sonnentag und Sterntag

Die Sternzeit ist identisch mit dem Stundenwinkel des Frühlingspunktes. Da dieser vom Meridian des Beobachters gezählt wird, ist die Sternzeit eine Ortszeit. Sie gibt Aufschluss über den momentanen Stand der Himmelskugel am Beobachtungsort. Die Stundenwinkel aller Sterne lassen sich bei der Kenntnis der Rektaszension (des Winkelabstandes im Stundenwinkel zum Frühlingspunkt; gemessen gegen die tägliche Bewegungsrichtung) schnell aus der Sternzeit ermitteln. Es gilt folgender Zusammenhang zwischen der Sternzeit Θ , dem Stundenwinkel t und der Rektaszension α .

$$\Theta = t + \alpha$$

Abbildungen 6 und 7 (Polfigur) veranschaulichen diesen Zusammenhang. Mit einer Sternzeituhr und einer Liste der Rektaszensionswerte läßt sich damit unmittelbar der zugehörige Stundenwinkel berechnen, der am parallaktisch montierten Teleskop einzustellen ist, wenn das fragliche Gestirn beobachtet werden soll. Die Deklinationseinstellung ist unabhängig vom Stand der Sternzeituhr. Die Sternzeitformel vereinfacht sich drastisch, wenn nur Gestirnspassagen auf dem Meridian beobachtet werden, denn dann ist der Stundenwinkel $t = 0$.

$\Theta = \alpha$ (auf dem Meridian)

Passiert ein Gestirn bekannter Rektaszension den Meridian, so lässt sich nach dieser Formel sofort die Sternzeit angeben. Andererseits lässt sich mit Hilfe einer zuvor gestellten Sternzeituhr die Rektaszensionskoordinate eines Gestirns ermitteln, indem man seine Kulmination abwartet und in dem Moment die Sternzeit abliest.

Nur an einem Tag im Jahr zeigt die schneller tickende Sternzeituhr den gleichen Stand wie eine Uhr mit Anzeige der mittleren Ortszeit (Ortszeit ist durch eine Längenkorrektur aus der Zonenzeit zu berechnen), nämlich am 23. September bei Herbstanfang um 0.00 Uhr. Dann steht der Frühlingspunkt in oberer Kulmination (= 0.00 Uhr Sternzeit) und die Sonne im Herbstpunkt in unterer Kulmination (= 0.00 mittlere Ortszeit). Danach wächst der Unterschied täglich um 3 Minuten und 57 Sekunden, bis er ein halbes Jahr später, wenn die Sonne im Frühlingspunkt steht, auf 12 Stunden angewachsen ist. Aus dem Uhrenvergleich zwischen einer Sternzeituhr und einer Uhr, die mittlere Ortszeit zeigt, lässt sich also das Datum ermitteln. Übertragen auf die Sichtbarkeit des Sternenhimmels bedeutet dies aber auch, dass in jeder Jahreszeit um Mitternacht jeweils ein anderer Ausschnitt des Sternenhimmels sichtbar ist.

Zonenzeiten

Zeitählungen, die sich auf den Lauf der Sonne in einem gegebenen Horizontsystem beziehen, sind notwendigerweise „Ortszeiten“, die nicht für jede Beobachterpositionen identisch sind. Da die Zeitählungen der Astronomie auf der Beobachtung der oberen bzw. der unteren Kulmination der Sonne bzw. des Frühlingspunktes auf dem Ortsmeridian basieren, muss bei einem Vergleich verschiedener Ortszeiten der Unterschied in geographischer Länge der betrachteten Vergleichsmeridiane berücksichtigt werden. Zur Festlegung der Zeitählung für einzelne räumlich begrenzte Zonen der Erde werden Bezugsmeridiane eingeführt und deren mittlere Ortszeit als Zonenzeit für die gesamte Zeitzone veranschlagt. Dies erspart die notwendige aber lästige Umrechnung von Ortszeiten bei Reisen in Nachbarorte in Richtung des jeweiligen Breitenkreises. Die Zeitzonen der Erde unterscheiden sich jeweils um eine Stunde, denn die Bezugsmeridiane sind um eine Längendistanz von 15° voneinander entfernt. Der Nullmeridian ist aus historischen Gründen durch den Großkreis der geographischen Länge von Greenwich / England bestimmt. Die mittlere Ortszeit von Greenwich wird auch als Weltzeit bzw. Universal Time (*UT*) bezeichnet. Deutschland gehört zur Zone der mitteleuropäischen Zeit (*MEZ*), die sich aus $MEZ = UT + 1 \text{ Stunde}$ ergibt, den Bezugsmeridian der *MEZ* ist der 15. Grad östlicher Länge, der auch durch die Stadt Görlitz verläuft. In Görlitz entspricht demnach die *MEZ* der mittleren Ortszeit (*MOZ*). Um die mittlere Ortszeit eines Ortes beliebiger geographischer Länge zu berechnen, ist die jeweilige Zonenzeit um einen Betrag zu korrigieren, der vom Längenabstand des Ortsmeridians zum Bezugsmeridian der Zone abhängt. Bei einem Unterschied von x Längengraden in Richtung West sind von der Zonenzeit $4x$ Minuten abzuziehen, bei einer östlichen Lage zum Bezugsmeridian sind $4x$ Minuten hinzuzuzählen, denn weiter östlich gelegene Beobachter erleben alle astronomischen Ereignisse wie z.B. den Sonnenaufgang früher und folglich zeigt die dortige Ortszeituhr einen späteren Stand als die Ortszeituhr eines weiter westlich gelegenen Beobachters, wenn er das gleiche Ereignis erblickt. Die Ortskorrektur lässt sich für die Mitteleuropäische Zeitzone nun folgendermaßen formelmäßig erfassen.

$$MOZ = MEZ + 4 \text{ min} \cdot (\lambda - 15^\circ)$$

Der Begriff der mittleren Ortszeit deutet bereits an, dass hier Differenzen zum wahren astronomischen Sachverhalt vorliegen. Der Stundenwinkel der „wahren“ Sonne, also jener, die tatsächlich am Himmel steht und uns leuchtet, wird als Wahre Ortszeit (*WOZ*) bezeichnet. Jede Messung des Sonnenstandes, z.B. durch Sonnenuhren, bezieht sich auf diese wahre Sonne und ein erhaltener Stundenwinkel unseres sichtbaren Tagesgestirns gibt noch keine Auskunft über die exakte mittlere Ortszeit. Wahre und gedachte mittlere Sonne unterscheiden sich, da es Ungleichheiten im Lauf der Sonne gibt, die letztlich zu unterschiedlichen Tageslängen führen würden. Da dies im bürgerlichen Leben Verwirrung stiften würde, basiert die bürgerliche Zeitrechnung auf einer mittleren Sonne, bei der die Ungleichheiten des wahren Sonnenlaufs zum Ausgleich kommen. Die „Ungleichheiten“ bzw. „Anomalien“ im Sonnenlauf werden uns ein Einstiegsfenster zu tiefen astronomischen Gesetzmäßigkeiten eröffnen und uns an geeigneter Stelle ausführlich beschäftigen. In diesem einleitenden Abschnitt werden wird die Diskussion deshalb nicht vertiefen und die nötige Korrektur, die als „Zeitgleichung“ oder „Zeitangleich“ bezeichnet wird, nur kurz vorstellen. Sie ist die Quelle großer Enttäuschung bei stolzen Sonnenuhrbesitzern, wenn sie auf dieser keinen dauerhaft mit der Armbanduhr übereinstimmenden Stand feststellen können. Nicht selten ist eine verärgerte Abwendung von diesem historischen Feld der Zeitmessung die Folge.

Wer eine Sonnenuhr abliest erhält die *WOZ*, die durch die Zeitgleichung *ZGL* in die *MOZ* zu überführen ist:

$$MOZ = WOZ + ZGL$$

Die Zeitgleichung ist in Abbildung 10 graphisch dargestellt (aus G.D.Roth: Handbuch für Sternfreunde). Die Korrektur kann bis zu - 17 Minuten bzw. + 14 Minuten betragen (am 4. 11. bzw. 12. 2). Die Nebenextrema liegen bei -4 und +7 Minuten am 15. 5. und 27. 7. Am 16. 4., 14. 6. , 2. 9. und 26. 12. nimmt die Zeitgleichung den Wert Null an. Wer die Zeitgleichung ignoriert, was bei einer einführenden Behandlung der Sonnenuhr in der Schule sicher ratsam ist, kommt nicht zu dramatisch falschen Ergebnissen bei der Zeitbestimmung durch Schattenwurf. (Achtung: Manche Quellen bringen die Zeitgleichung mit anderem Vorzeichen!)

Zusammengefasst:

$$WOZ = MEZ + 4 \text{ min} \cdot (I - 15^\circ) - \text{Zeitgleichung, bzw.}$$

$$MEZ = WOZ - 4 \text{ min} \cdot (I - 15^\circ) + \text{Zeitgleichung}$$

$$MESZ = MEZ + 1h = WOZ - 4 \text{ min} \cdot (I - 15^\circ) + \text{Zeitgleichung} + 1h$$

1.2 Die Umrechnung von Koordinaten

Im vorherigen Abschnitt wurden die wichtigsten astronomischen Koordinatensysteme vorgestellt und erläutert. Nun gilt es, die mathematischen Beziehungen, die eine Umrechnung eines Koordinatensatzes in den anderen ermöglichen, einzuführen. Die grundlegenden Formeln entstammen der „Sphärischen Trigonometrie“, welche die Winkel- und Seitenbeziehungen in Kugeldreiecken, die ausschließlich aus Großkreissegmenten gebildet werden, in einen Sinus- und zwei Kosinussätze fasst. Diese Basisformeln für die Himmelsgeometrie entnehmen wir einer mathematischen Formelsammlung oder einem Lehrbuch der Kugelgeometrie und verweisen auf die dort vorgestellten Herleitungen. Die Abbildung 11 zeigt ein sphärisches Dreieck aus Großkreisen. Die Winkel werden mit den Großbuchstaben A, B, C bezeichnet, die gegenüberliegenden Seiten mit den entsprechenden Kleinbuchstaben. Es gelten folgende Lehrsätze.

Sinussatz der sphärischen Geometrie:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

Kosinussätze der sphärischen Geometrie:

$$\cos B \cdot \sin a = -\cos A \cdot \sin b \cdot \sin c + \cos b \cdot \sin c$$

$$\cos a = \cos A \cdot \sin b \cdot \sin c + \cos b \cdot \cos c$$

alternative Schreibweise:

$$\cos A = \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a - \cos B \cdot \cos C$$

$$\cos a = \cos A \cdot \sin b \cdot \sin c + \cos b \cdot \cos c$$

Aus diesen Sätzen lässt sich folgern, dass ein sphärisches Dreieck vollständig bestimmt ist, wenn folgende Voraussetzungen gegeben sind:

- Alle drei Seiten sind bekannt (a, b, c).
- Alle drei Winkel sind bekannt (A, B, C).
- Eine Seite und zwei Winkel sind bekannt (A, B, c oder A, B, a).
- Zwei Seiten und ein Winkel sind bekannt (a, b, C oder a, b, A).

Das gesteckte Ziel ist die Berechnung von Koordinaten des Äquatorialsystems aus beobachteten Koordinaten des Horizontalsystems. Wir suchen dazu ein sphärisches Dreieck an der Himmelskugel, welches möglichst viele relevante Koordinaten enthält, die wir dann mit Hilfe des Sinussatzes und der beiden Kosinussätze zu einem Formelsystem verknüpfen. Das gesuchte Dreieck ist in Abbildung 12 kenntlich gemacht. Es wird auch als Astronomisches Dreieck oder als Nautisches Dreieck bezeichnet, da die Navigation nach Gestirnen darauf gründet. Der Seemann allerdings projiziert das Dreieck von der Himmelskugel zurück auf den Erdkörper um dann seine dortige geographische Lage mit Hilfe der astronomischen Koordinaten zu ermitteln. Im Astronomischen Dreieck lässt sich folgende Zuordnung zwischen den Winkeln A, B, C, den Seiten a, b, c und den Koordinaten des Horizontal- und Äquatorialsystems ablesen.

Sphärisches Dreieck	Astronomisches Dreieck	Bezeichnungen
A	t	Stundenwinkel
B	$180^\circ - a$	180° - Südazimuth
C	-	parallaktischer Winkel
a	$90^\circ - h$	Zenitdistanz
b	$90^\circ - \delta$	90° - Deklination
c	$90^\circ - \phi$	90° - geografische Breite

Einsetzen dieser Winkel in die trigonometrischen Grundformeln liefert:

$$\sin a \cdot \cosh = \sin t \cdot \cos \delta$$

$$\cos a \cdot \cosh = \cos t \cdot \cos \delta \cdot \sin \Phi - \sin \delta \cdot \cos \Phi$$

$$\sinh = \cos t \cdot \cos \delta \cdot \cos \Phi + \sin \delta \cdot \sin \Phi$$

(Azimutha von Süd über West in Richtung Ost gerechnet)

Die Umkehrung der Transformation ergibt sich durch folgende Ersetzungen.

$$\delta \rightarrow h \quad t \rightarrow a \quad (90^\circ - \phi) \rightarrow -(90^\circ - \phi)$$

Dies führt auf folgendes System von Umkehrformeln:

$$\begin{aligned} \sin t \cdot \cos \delta &= \sin a \cdot \cosh \\ \cos t \cdot \cos \delta &= \cos a \cdot \cosh \cdot \sin \Phi + \sinh \cdot \cos \Phi \\ \sin \delta &= -\cos a \cdot \cosh \cdot \cos \Phi + \sinh \cdot \sin \Phi \\ &(\text{Azimuth wie oben}) \end{aligned}$$

Bei der Ermittlung beider Formelsysteme fanden folgende Beziehungen Verwendung, die sich mit den bekannten Additionstheoremen des Sinus und Kosinus rasch herleiten lassen.

Hilfsformeln:

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \end{aligned}$$

Additionstheoreme :

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \beta \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

Für einen experimentellen Zugang zur Himmelsgeometrie sind diese Basisformeln unerlässlich. Wer sich aber z.B. auf die Betrachtung des Meridians, also der möglichen Höchststände der Gestirne beschränkt, wird im allgemeinen auch ohne Verwendung der vollständigen sphärischen Geometrie dem Himmel wichtige Erkenntnisse entreißen können. So kann man z.B. mit einer Windrose mit einem zentralen lotrechttem Schattenstab im Zentrum die Koordinaten der Sonne im Horizontsystem - Azimuth a - und Höhe h - bestimmen und dann mit Hilfe geeigneter sphärischer Dreiecksberechnung die Sonnendeklination δ ermitteln. Während der Kulmination, wenn die Sonne Südstand erreicht und ihr Azimuth Null wird, lässt sich diese Aufgabe schnell durch einen Blick auf die Zeichnung 13 lösen, in der ein Meridianschnitt zur Kulminationszeit der Sonne gezeigt ist. Aus der mittels Schattenwurf gemessenen Sonnenhöhe h und der bei gegebener geographischen Breite ϕ bekannten Äquatorhöhe auf dem Südmeridian ($90^\circ - \phi$) lässt sich die Sonnendeklination δ zu $\delta = h - (90^\circ - \phi)$ berechnen.

Neben den Koordinaten Azimuth a und Höhe h des Horizontsystems und den Koordinaten Deklination δ und Stundenwinkel t des Äquatorsystems spielt die geographische Breite ϕ des Standortes eine wichtige Rolle im Formelsatz zur Umrechnung dieser Koordinaten ineinander. Beobachter in verschiedenen geographischen Breiten können demnach ihre Horizontalkoordinaten nicht direkt miteinander vergleichen. Erst eine Übertragung ins Äquatorialsystem ermöglicht dies. Die Deklinations- und Rektaszensionswerte eines Sterns sind nicht mehr abhängig von der Beobachtungsposition, die Stundenwinkelwerte lassen sich durch eine Zeitkorrektur, die den Unterschied in geographischer Länge zwischen zwei Beobachtern erfasst, leicht angleichen. Die Vorzüge des Äquatorialsystems sind hier unübersehbar und ein Beweis für die Mächtigkeit einer Abstraktion, die auf der Basis von Himmelsbeobachtungen in jeweils gültigen Horizontalsystemen möglich wird.

1.3 Beobachtete und idealisierte Koordinaten

Die Äquatorialkoordinaten δ und t bzw. α beschreiben die Gestirnspositionen für einen gedachten Beobachter im Zentrum einer durchsichtigen Erde ohne lichtablenkende und lichtschwächende Lufthülle. Da diese Idealisierung nicht die reale Beobachtungssituation wiedergibt, müssen die Unterschiede, die sich in der Praxis ergeben, bedacht werden.

Da eine einführende Positionsastonomie ohne Fernrohr in der Schule keine größere Genauigkeit als etwa $\frac{1}{2}$ bis 1° anstreben sollte, wenn sie durch überzogene Genauigkeitsforderungen ihren zur Selbsttätigkeit anregenden Wert nicht von vornherein einbüßen will, können einige der auftretenden Störeinflüsse außer Acht gelassen werden.

Deshalb werden die üblichen Winkelkorrekturen der sphärischen Astronomie, die in der Folge erläutert werden, nämlich die *Parallaxe*, *Refraktion* und *Aberration*, vernachlässigt, sofern sie nicht im Bereich von einigen 10 Bogenminuten liegen. Also höchstens die Horizontalparallaxe des Mondes ($57'$) und die horizontnahe Refraktion (bis $35'$; für den Oberrand von Sonne und Mond $35'+16' = 51'$) können merkliche verfälschende Einflüsse bewirken. Beobachtungen der Sonnenposition z.B. durch Schattenmessung sind damit bei größeren Höhenwinkeln als etwa 10° im Rahmen unserer Genauigkeitsforderung frei von allen Korrekturen.

Zur Refraktion

Der kugelförmige Erdkörper ist in ein Luftmeer eingehüllt, dessen Dichte am Grunde - am Erdboden! - geringer ist, als in den oberen atmosphärischen Schichten. Ein Lichtstrahl eines fernen Sterns durchdringt die Schichten der Lufthülle und wird dabei nach den Regeln des Brechungsgesetzes abgelenkt. Da er immer dichter werdende Schichten mit immer größer werdenden Brechungsindizes durchläuft, wird er ständig zum Einfallslot hin gebeugt, so dass er schließlich auf einem gekrümmten Lichtweg den Beobachter erreicht. Der Beobachter, der ja vom wahren Lichtweg nichts weiß, projiziert die Richtung, aus der ihn der Strahl letztlich traf, zurück ans Himmelsgewölbe und sieht den Stern bei einem größeren Höhenwinkel, genannt „scheinbare Höhe“, als im Falle eines ungebrochenen Lichtweges (siehe Abbildung 14). Die Refraktion hebt die Sternposition folglich ein wenig an. Dieser Effekt ist um so ausgeprägter, je tiefer das beobachtete Gestirn am Horizont steht, denn dann läuft das Sternlicht eine große Strecke durch die irdische Lufthaut. Steht das Gestirn im Zenit und durchläuft das Licht die Dichteschichten senkrecht, kommt es dagegen zu keiner Ablenkung. Am Horizont (bei der scheinbaren Höhe 0) bewirkt die Refraktion eine Anhebung um etwa 35 Bogenminuten; das ist mehr als der Winkeldurchmesser von Sonne und Mond. Betrachtet man Auf- oder Untergänge von Sonne und Mond, so steht der Mittelpunkt dieser Gestirne $35 + 16 = 51$ Bogenminuten unterhalb des mathematischen Horizontes, wenn der Oberrand erst- bzw. letztmalig am Horizont sichtbar ist. Größere Refraktionseffekte können bei besonderen Witterungsbedingungen eintreten, da die Dichte und mithin der Brechungsindex der Luft bzw. der einzelnen meteorologisch bedeutsamen Schichten von Druck und Temperatur abhängt. Die Refraktionseffekte berechnen sich bei mittleren Werten für Temperatur und Luftdruck für Höhen größer als 10° (entspricht Zenitdistanzen z kleiner als 80°) mit guter Genauigkeit nach folgender Formel:

$$R \approx (n - 1) \cdot \tan z$$

$$(n - 1) \approx 58'' : \text{Refraktionskonstante}$$

Dieser Ausdruck lässt sich leicht mit dem Brechungsgesetz von Snellius herleiten, das auf eine Folge von brechenden Schichten mit unterschiedlichen Brechungsindizes angewandt wird.

$$\text{Brechungsgesetz von Snellius: } n_1 \cdot \sin \alpha = n_2 \cdot \sin \beta$$

Licht, das die Grenzfläche der Schichten mit den Brechungsindizes n_1 und n_2 durchdringt, erfährt eine Strahlenbrechung, die durch diese Brechungsformel bestimmt ist. Der Winkel α ist der Einfallswinkel, gemessen zwischen der Strahlrichtung und der Grenzflächennormale, unter dem Winkel β gegen die Normale läuft das Licht im optisch dichteren Medium mit Index n_2 weiter (siehe Abbildung 15).

Im folgenden rechnen wir mit der vereinfachenden Annahme, die verschieden dichten Luftschichten und der Erdboden seien allesamt parallel zueinander. Dies gilt natürlich nur für nicht allzu große Zenitdistanzen, denn beim Blick zum Horizont wirkt sich die Krümmung der Erde und ihrer Lufthaut aus, und unsere Annahme über die Geometrie der brechenden Luftschichten wird grob falsch. Die Abbildung 16 veranschaulicht unsere Modellvorstellung. Das Sternlicht trifft aus dem Vakuum ($n = 1$) unter dem Winkel z (wahre Zenitdistanz) auf die äußerste Luftschicht i , und wird zum neuen Zenitwinkel z_i gebrochen. Unter diesem Winkel trifft das Licht auf die nächste Schicht mit Brechungsindex n_{i-1} . Da alle tieferliegenden Schichten (im meteorologischen Normalfall) dichter sind als die höheren, steigt der Brechungsindex immer stärker an, und von Schicht zu Schicht stellt sich ein immer kleiner werdender Zenitwinkel ein. Die Ausgangsrichtung einer oberen Schicht wird zur Einfallrichtung der nächst tieferen Schicht. Durch wiederholte Anwendung des Brechungsgesetzes, lässt sich die wahre Zenitdistanz z mit der am Erdboden beobachtbaren scheinbaren Zenitdistanz z' in Beziehung setzen.

$$\begin{aligned} 1 \cdot \sin z &= n_i \cdot \sin z_i \\ n_i \cdot \sin z_i &= n_{i-1} \cdot \sin z_{i-1} \\ n_{i-1} \cdot \sin z_{i-1} &= n_{i-2} \cdot \sin z_{i-2} \\ &\dots \\ n_1 \cdot \sin z_1 &= n \cdot \sin z' \\ \Rightarrow \sin z &= n \cdot \sin z' \end{aligned}$$

Die scheinbare Zenitdistanz z' und die wahre Zenitdistanz z unterscheiden sich um den Refraktionswinkel R (siehe Abbildung 14). Die Refraktion täuscht immer eine höhere Gestirnsposition bzw. eine kleinere Zenitdistanz an. Die wahre Zenitdistanz ermittelt sich deshalb nach $z = z' + R$. Setzt man dies in die obige Formel ein und berücksichtigt, dass R ein kleiner Winkel ist, lässt sich der aus dem Brechungsgesetz gewonnene Ausdruck mit Hilfe des Additionstheorems für den Sinus vereinfachen:

$$\begin{aligned} n \cdot \sin z' &= \sin z = \sin(z' + R) = \sin z' \cdot \underbrace{\cos R}_{\approx 1} + \cos z' \cdot \underbrace{\sin R}_{\approx R} \\ \Rightarrow n \cdot \sin z' &\approx \sin z' + \cos z' \cdot R \\ \Leftrightarrow (n - 1) \cdot \sin z' &\approx R \cdot \cos z' \\ \Leftrightarrow R &\approx (n - 1) \cdot \tan z' \end{aligned}$$

Diese Formel liefert sehr gute Werte für scheinbare Zenitdistanz z' , die 60° nicht übertreffen. Wenn keine größere Genauigkeit als $\frac{1}{2}$ Grad verlangt ist, kann der Gültigkeitsbereich für die Zenitdistanz bis rund 80° ausgedehnt werden.

Die Refraktion ist damit kein Effekt, der bei der Beobachtung mit freiem Auge zu spürbaren Winkeländerungen führt, wenn der Höhenwinkel groß ist. Bei der Beobachtung am Horizont sind die Verhältnisse anders. Dort versagt die einfache Refraktionsformel. Für die Berechnung des Refraktionswinkels müssen dann andere Verfahren bemüht werden.

Für unsere Diskussion genügt die folgende tabellarische Aufstellung der Refraktionswinkel am Horizont in Abhängigkeit von der scheinbare Höhe (für 1013 Hektopascal Luftdruck und +10°C Temperatur). Die scheinbare Höhe addiert sich mit der scheinbaren Zenitdistanz eines Gestirns zu 90°. Sie ist der Winkelabstand zwischen dem mathematischen Horizont und dem Gestirnmittelpunkt bei der Beobachtung. Ein mathematischer Horizont lässt sich durch eine mit der Wasserwaage horizontal eingerichtete Ebene oder mit einem Theodolithen bei eingespielter Libelle und Höheneinstellung Null Grad realisieren.

scheinbare Höhe in Grad	Refraktion in Bogenminuten	scheinbare Höhe in Grad	Refraktion in Bogenminuten
10°	5'19''	3°00'	14'22''
9°	5'52''	2°30'	16'09''
8°	6'33''	2°00'	18'18''
7°	7'24''	1°30'	21'05''
6°	8'28''	1°00'	24'37''
5°	9'52''	0°40'	27'36''
4°	11'45''	0°20'	31'09''
3°30'	12'56''	0°00'	35'24''

Zur Höhenparallaxe

Ein Himmelskörper, der im Vergleich zu den Sternen nahe zur Erde steht, wird von zwei Beobachtern, die an weit voneinander entfernten Orten das fragliche Gestirn beobachten, an verschiedenen Stellen auf der Himmelskugel gesehen. Da die Gestirnskoordinaten durch Projektion der Position an die Himmelskugel ermittelt werden, hängt das Messergebnis von der geographischen Lage des Beobachters und der Winkelhöhe des Gestirns über dem Horizont des Beobachtungsortes ab (siehe Abbildung 17). Aber auch von einem einzigen Beobachter kann dieser Effekt, der als Parallaxe bezeichnet wird, beobachtet werden, wenn er durch den täglichen Umschwung der Erdkugel quasi von allein, nur durch Warten, an eine von der ersten Beobachtung weit entlegene Stelle im Raum geführt wird. Für die Berechnung von Koordinaten unter Anwendung der Formeln der sphärischen Geometrie wird ein ideeller Beobachtungsstand im Zentrum der Erde angenommen, so dass parallaktische Effekte nicht auftreten. Die gemessenen Gestirnspositionen müssen demnach durch eine geeignete Datenreduktion auf die ideellen Positionen zurückgeführt werden. In Abbildung 17 ist ersichtlich, wie der Parallaxeneffekt bei Annäherung am den Horizont zunimmt. Der Maximalwert wird deshalb auch als Horizontalparallaxe bezeichnet. Bei größeren Höhen nimmt die Höhenparallaxe schnell ab und verschwindet, wenn das Gestirn im Zenit des Beobachters steht, weil er dann die selbe Blickrichtung zu ihm hat wie der gedachte Beobachter im Zentrum der Erde, so dass die von beiden Standpunkten an die Himmelskugel projizierten Koordinaten übereinstimmen.

Zur Berechnung der Horizontalparallaxe HP genügt die Kenntnis des (mittleren) Erdradius R_E und des Abstandes des Gestirns. Gesucht ist der Sinus HP des rechtwinkligen Dreiecks, welches aus dem Erdmittelpunkt M , dem Gestirn S und dem Beobachter B gebildet wird. Die Erde wird als Kugel idealisiert. Wie die Parallaxe zu berechnen ist, wenn die ellipsoide Gestalt des Erdkörpers zugrundegelegt wird, beschreiben die Standardlehrbücher der sphärischen Astronomie.

Die Abbildungen 18 und 19 verdeutlichen die zu berücksichtigenden Veränderungen in diesem Fall. Für jeden Breitenkreis ist zwischen der geozentrischen und der geographischen Breite zu unterscheiden. Die geographische Breite ist - für unsere Zwecke - identisch mit der Höhe des nördlichen Himmelspols über dem mathematischen Horizont und kann damit durch astronomische Beobachtungen bestimmt werden. Die zum Erdellipsoiden senkrechte Linie, die den Zenit des lokalen Horizontsystems trifft, gelangt in rückwärtiger Verlängerung nicht bis zum Erdmittelpunkt. Nur bei einer kugelförmigen Erde wäre dies der Fall. Verbindet man den Beobachtungsort mit dem Erdmittelpunkt, so ist diese Linie im allgemeinen nicht parallel zur Zenitrichtung. Diese durch die Erdmitte verlaufende Linie schließt mit der Äquatorebene einen Winkel ein, der geozentrische Breite genannt wird. Mit Hilfe des Äquatorradius a ($a = 6378,140 \text{ km}$) und des Polarradius b ($b = 6356,755 \text{ km}$) läßt sich die geozentrische Breite aus der geographischen ermitteln.

In der Abbildung 19 ist ein Schnitt durch die Erde gezeigt, der den Erdmittelpunkt und den Beobachtungsort einschließt und entlang des Längengrades verläuft. Die Erdradien a und b bilden die Halbachsen dieser Ellipse. Im gezeichneten xy -Koordinatensystem lautet die Gleichung dieser Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Die Normalrichtung auf der Ellipse (also die Zenitrichtung für den betrachteten Beobachtungsort) ist durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\tan \phi = -\frac{dx}{dy} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y}{x}$$

Die geozentrische Breite erhält man nun durch:

$$\tan \phi' = \frac{y}{x}$$

Folglich gilt für den Zusammenhang der geozentrischen mit der geographischen Breite:

$$\tan \phi' = \frac{b^2}{a^2} \cdot \tan \phi = (1 - e^2) \cdot \tan \phi, \quad \text{mit } e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$$

Die Differenz dieser zwei Breitenausdrücke erreicht ein Maximum von $11,5'$ bei einer Breite von 45° . Dieser Unterschied von geozentrischer und geographischer Breite wirkt sich bei der Berechnung der Parallaxe geringfügig aus. Wird der Mond z.B. auf dem Meridian beobachtet, so steht er bei der Beobachtung von einer ellipsoiden Erde in geringerer Höhe über dem Horizont, als bei der Beobachtung von einer exakt kugelförmigen Erde. Der Sinus einer Höhe, die um maximal $11,5'$ von einem Höhenwert abweicht, der bei kugelförmiger Erde gültig wäre, unterscheidet sich aber kaum vom Sinus des richtigen Höhenwertes. Wir werden deshalb im folgenden immer von einer kugelförmigen Erde ausgehen.

Damit gilt für die Höhenparallaxe:

$$\sin HP = \frac{R_E}{a}$$

$$R_E \approx 6,37 \cdot 10^6 \text{ m} : \text{Erdradius}$$

$$a : \text{Abstand Gestirn} - \text{Erde}$$

Die Berechnung der Höhenparallaxe P eines Gestirns, welches nicht im Horizont steht, erfolgt unter der Anwendung des Sinussatzes der ebenen Geometrie auf das Dreieck MSB .

$$\frac{\sin P}{R_E} = \frac{\sin(180^\circ - z')}{a} = \frac{\sin z'}{a} : \text{Sinussatz der ebenen Geometrie}$$

⇔

$$\sin P = \frac{R_E}{a} \cdot \sin z'$$

z' : scheinbare Zenitdistanz

$R_E \approx 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$: Erdradius

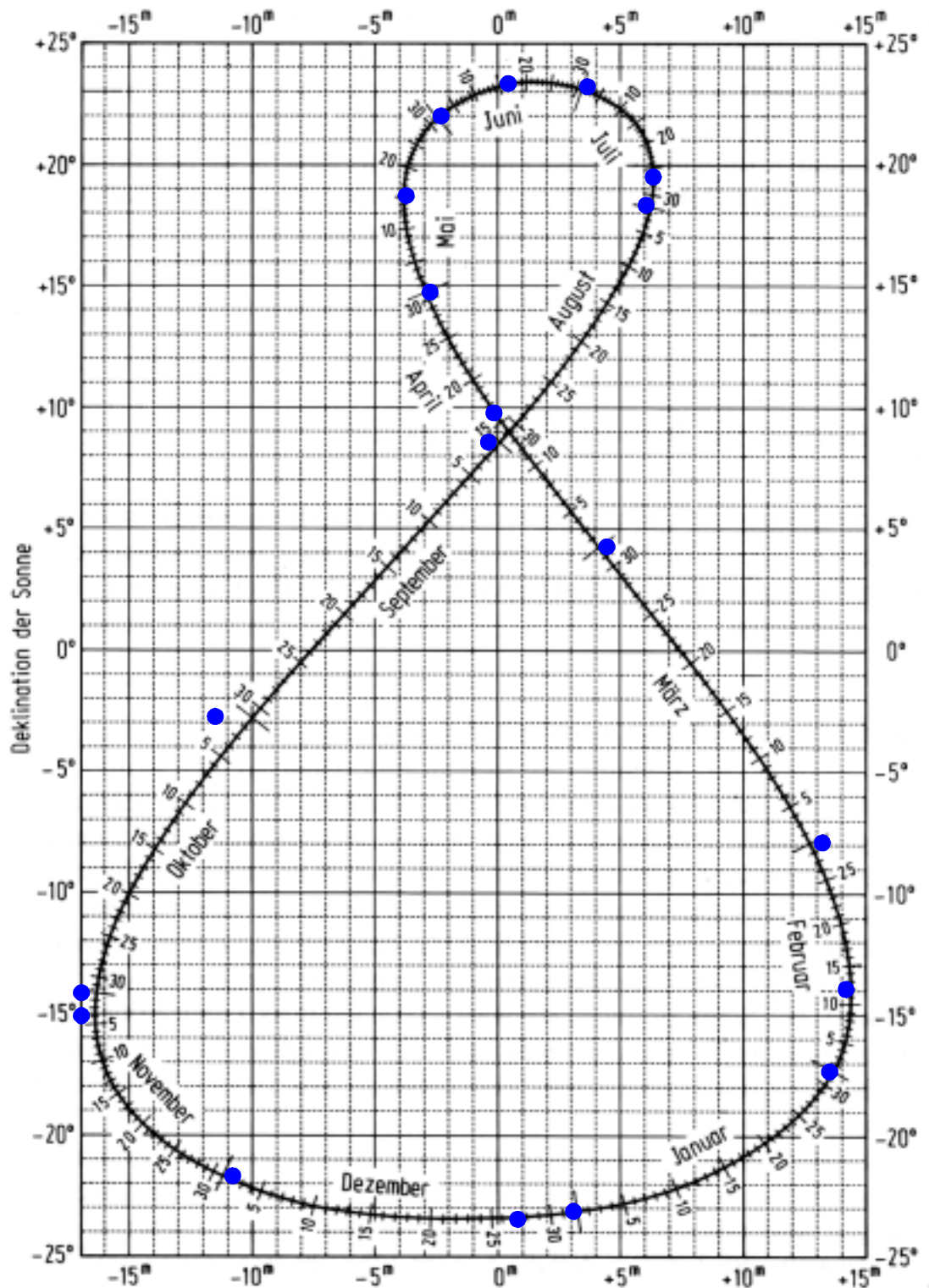
a : Abstand Gestirn – Erde

Am größten ist der Effekt der Höhenparallaxe bei den nahen Gestirnen Mond, Sonne und Planeten. Bei den Sternen, die viele Lichtjahre von uns entfernt sind, ist er nicht nachweisbar. Die folgende Tabelle gibt das Ergebnis für die Horizontalparallaxe von Mond, Sonne, Venus und Mars. Für die Planeten wurde der geringst- und größtmögliche Abstand zur Erde eingesetzt, was beim Mars der Oppositions- bzw. Konjunktionsstellung, bei Venus der Stellung in unterer bzw. oberer Konjunktion gleichkommt (Erdradius $R_E = 6,371 \cdot 10^6 \text{ m}$, Abstand Erde-Sonne $1AE = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$ (Astronomische Einheit)).

Gestirn	Abstand zur Erde	Horizontparallaxe
Mond	$60,33 R_E$	$57'$
Sonne	$23481 R_E = 1 AE$	$9''$
Venus	$0,28 AE \dots 1,72 AE$	$31'' \dots 5''$
Mars	$0,52 AE \dots 2,52 AE$	$17'' \dots 3''$

Tabelle: Horizontalparallaxen naher Gestirne

Es zeigt sich, dass die Parallaxen von Sonne und Planeten im Lichte unserer reduzierten Genauigkeitsansprüche vernachlässigt werden können, und dass nur jene des Mondes eine Größe erreicht, die es ermöglicht, durch einfache Peilmessungen auf den Abstand des Mondes von der Erde zu schließen.



Zeichnerische Auftragung der Zeitgleichung

Abbildung 10

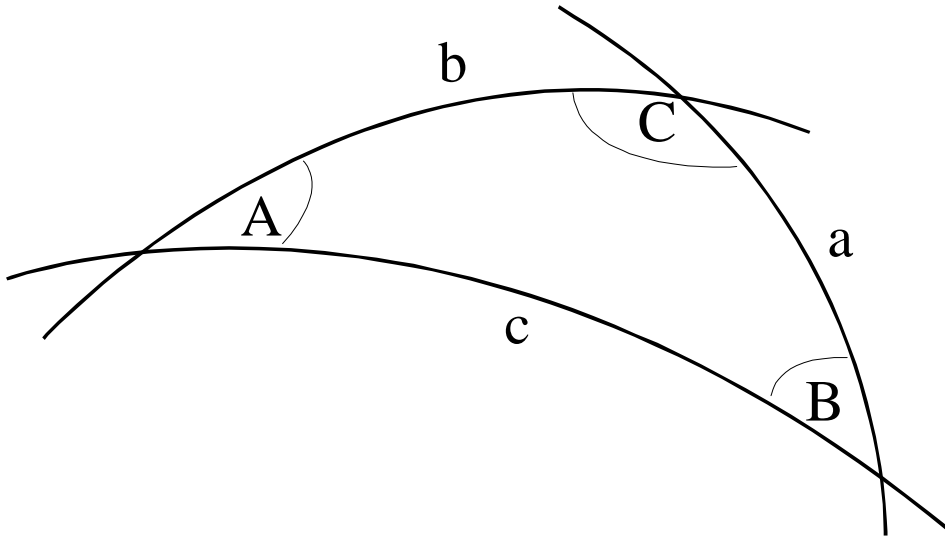


Abbildung 11

Das Astronomische Dreieck

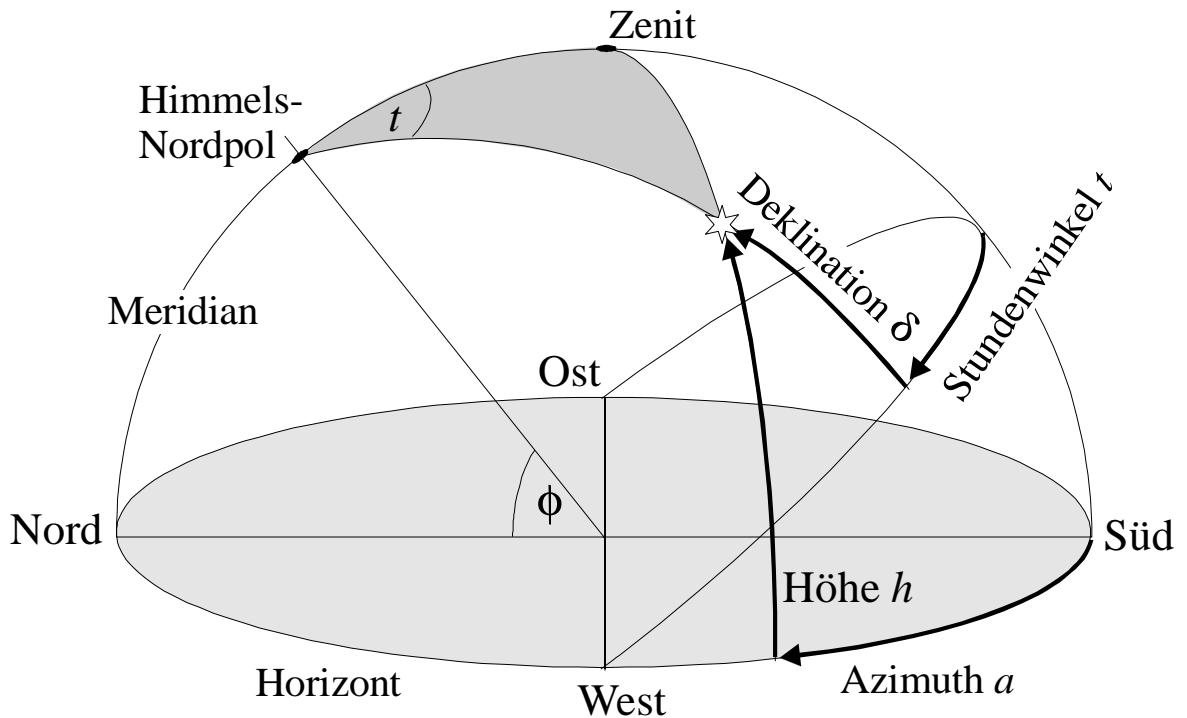


Abbildung 12

Schnitt durch den Meridian des Beobachters

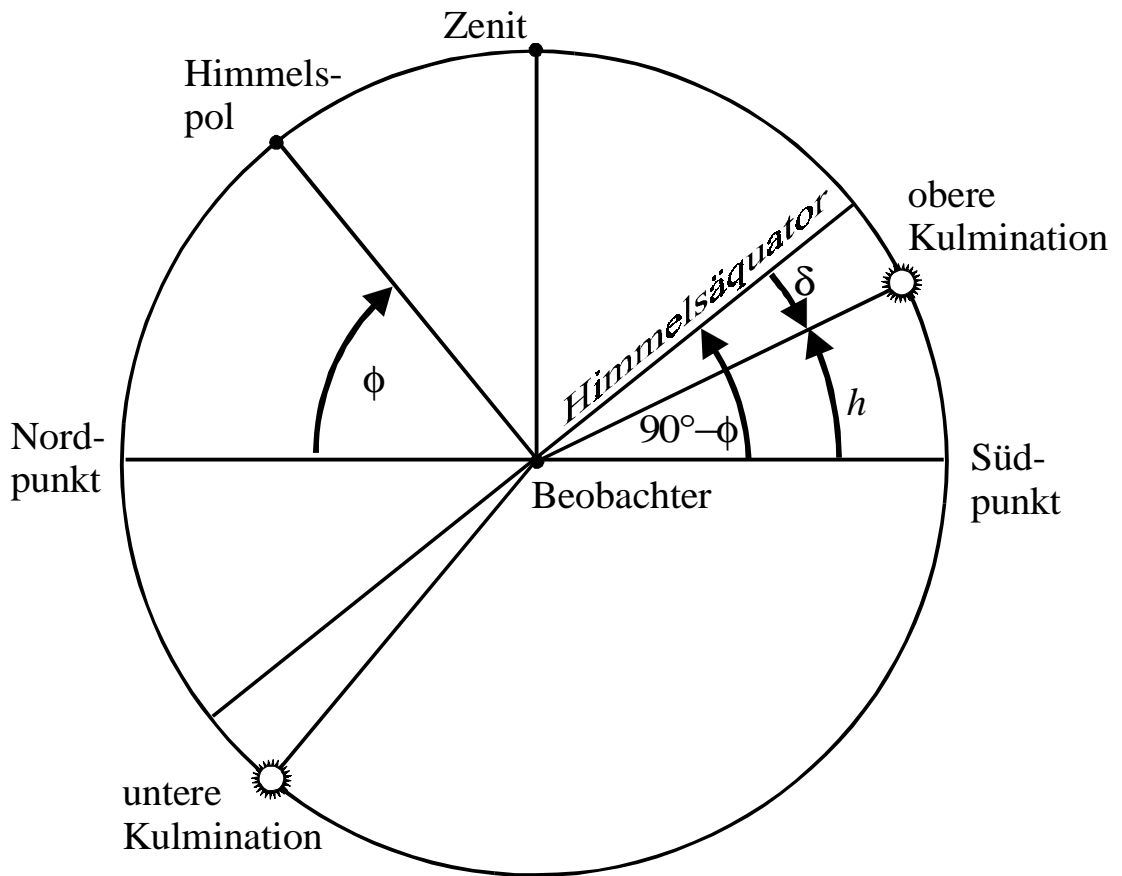
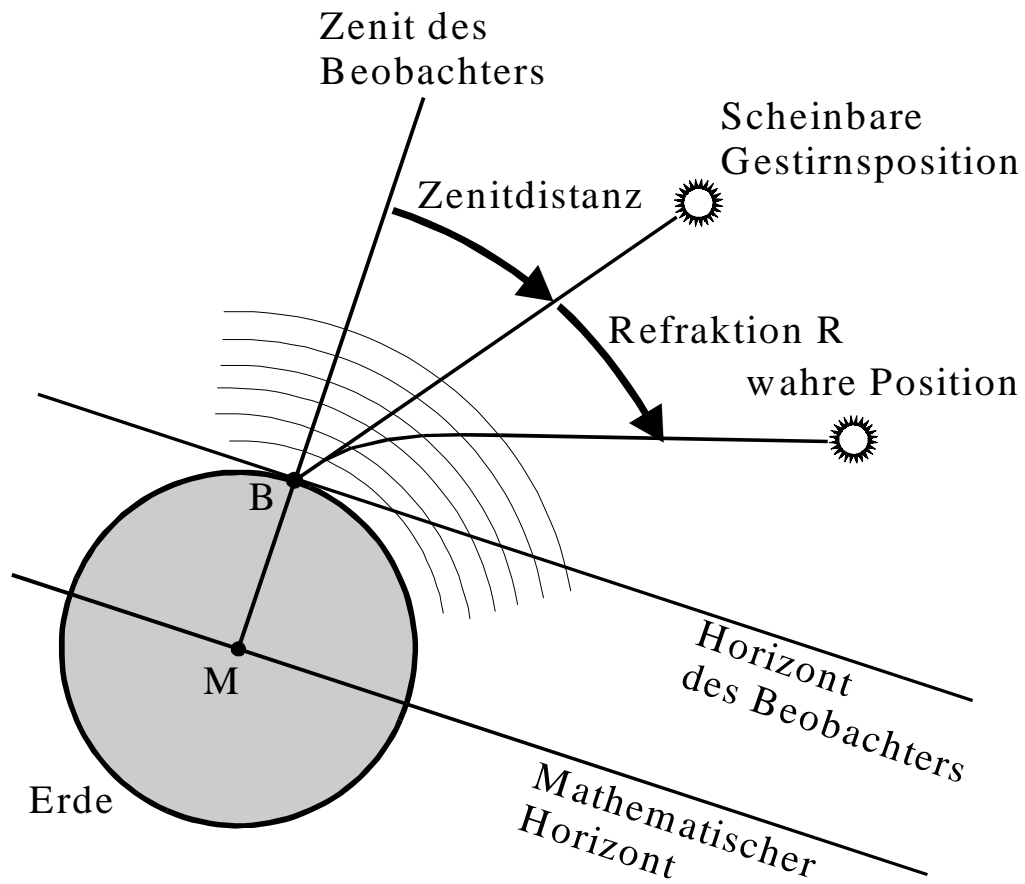


Abbildung 13

Veränderung der Gestirnshöhe durch die Refraktion



Schnitt der Himmelkugel durch den Höhenkreis des Gestirns

Abbildung 14

Lichtbrechung

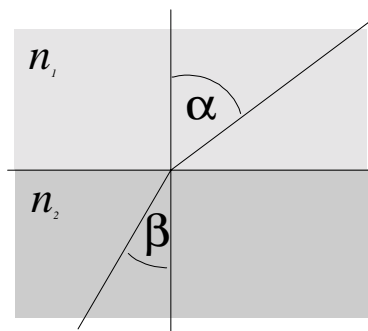


Abbildung 15

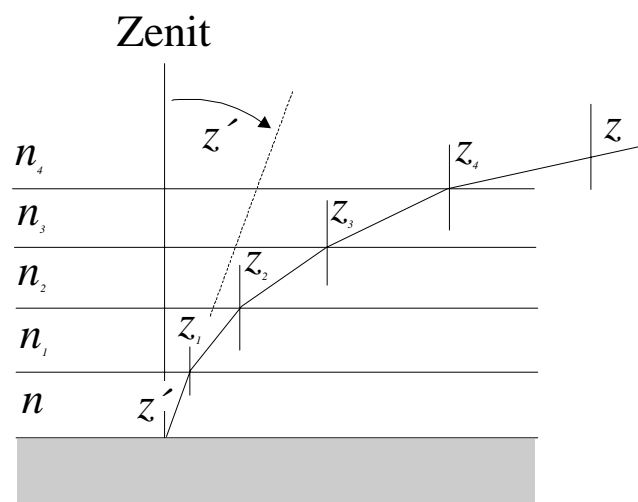
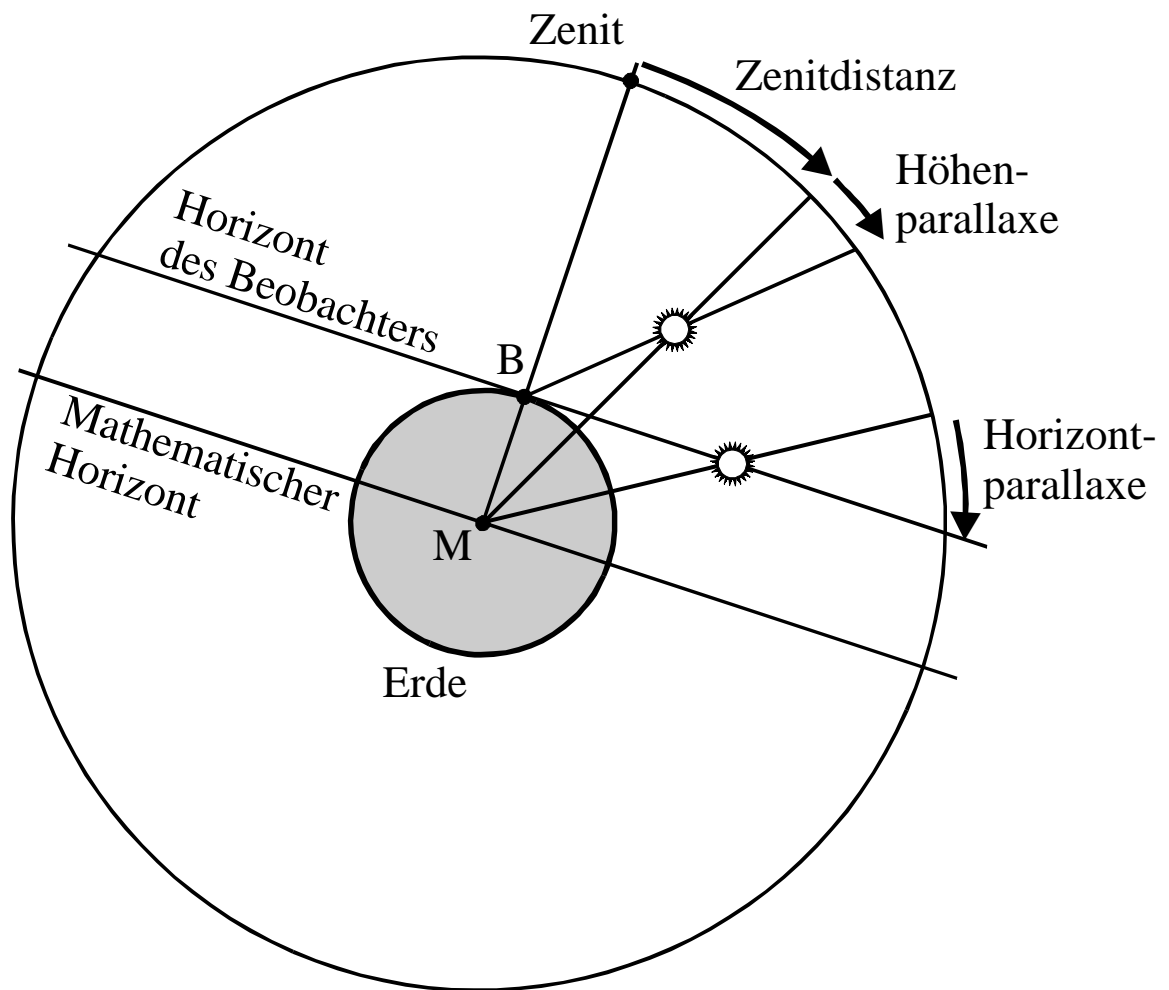


Abbildung 16

Veränderung der Gestirnshöhe durch die Höhenparallaxe



Schnitt der Himmelskugel durch den Höhenkreis des Gestirns

Abbildung 17

Geographische Lage auf der Erde

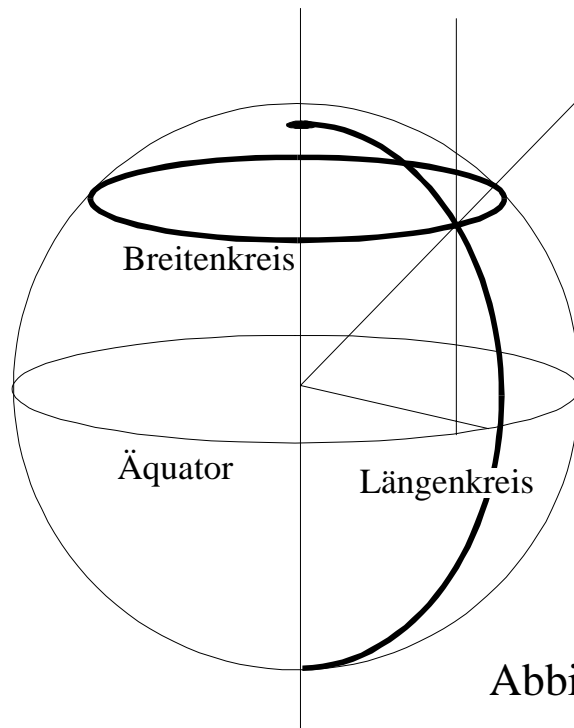


Abbildung 18

Geozentrische und geographische Breite

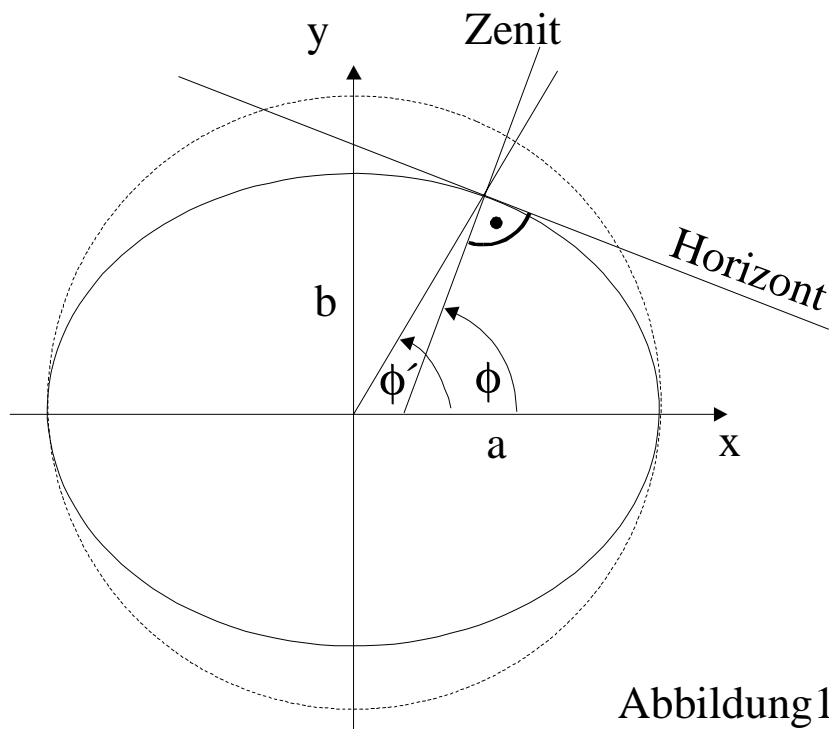


Abbildung 19