

„Wie weit sind die Sterne weg?“

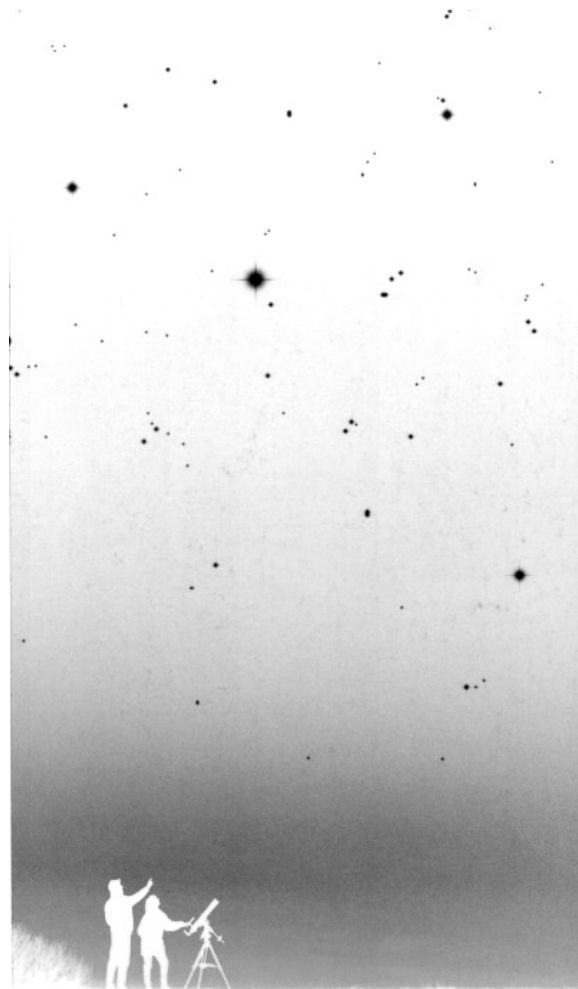
Abschätzung der Sternentfernung mit dem Silberkugelphotometer

Nimmt man an, die Sterne und die Sonne seien identisch beschaffen, so eröffnet sich eine einfache Möglichkeit zur Abschätzung der Größenordnung der Sternentfernung auf photometrischem Weg. Man vergleicht die Sternhelligkeit nachts mit der durch den Reflex in einer Silberkugel reduzierten Helligkeit einer künstlichen Lichtquelle und diese tagsüber mit der in der Silberkugel reduzierten Sonnenhelligkeit. Aus den Helligkeitsverhältnissen schließt man letztlich auf die relativen Abstände von Sonne und Stern.

Diese Methode, die auf den englischen Arzt und Physiker William Hyde Wollaston (1766 -1828) zurückgeht, eignet sich sehr gut als einführendes Unterrichtsprojekt zur visuellen Photometrie, zur geometrischen Optik des Kugelspiegels und zur Bestimmung der Solarkonstante. Schüler des Carl-Fuhlrott-Gymnasiums in Wuppertal haben dieses Experiment durchgeführt, wovon hier berichtet wird.

von Burkard Steinrücken

*Westfälische Volkssternwarte und
Planetarium Recklinghausen
steinruecken@sternwarte-recklinghausen.de*



Einleitung

Die Bestimmung der Sternentfernung war und ist eine wichtige Aufgabe der Astronomie. In der Antike war dieses Entfernungsmaß völlig unzugänglich und man entledigte sich dieser Unkenntnis in Gestalt einer gedachten Himmelskugel, an der die Sterne alle in einem gleichen Abstand zur Erde, die in der Mitte dieser Kugel als ruhend angenommen wurde, festgeheftet waren. Über den Radius dieser "Fixsternkugel" war keine Aussage möglich; ebenso wenig wie über die Natur der Sterne, die von der Sonne angeleuchtete reflektierende Punkte, selbstleuchtende Objekte unbekannter Natur oder Löcher in der Himmelskugel sein könnten, durch die Licht aus einer außen liegenden unbekannt hellen Sphäre eindringt.

Die Sternentfernung lässt sich im Prinzip am besten auf geometrischen Weg anhand des Parallaxeneffektes bestimmen, denn wegen der Wanderung der Erde um die Sonne (man benötigt also die kopernikanische Auffassung) müssen sich die Örter näherer Sterne gegen einen Hintergrund, gebildet aus weiter entfernten Sternen, im Verlauf des Jahres scheinbar systematisch verlagern. Mit den technischen Möglichkeiten zu den Zeiten von Kopernikus, Galilei und Kepler war dieser Effekt jedoch noch nicht nachweisbar.

Die Bestimmung dieser sog. "Fixsternparallaxe", die nur Bruchteile von Bogensekunden (bei nahen Sternen!) beträgt, durch die Präzisionsmessungen Bessels im Jahr 1838 hat die Frage nach der Größenordnung der Sternentfernung beantwortet. Sie liegt im Bereich von zig bis hundert Lichtjahren, wenn man die Frage nur auf jene Sterne des Nachthimmels bezieht, die mit bloßem Auge sichtbar sind. Es sind dies - bis auf Ausnahmen - Sterne, die sich im gleichen Milchstraßenarm wie die Sonne befinden.

Kennt man erst einmal die Sternentfernung, so lässt sich aus ihr und der scheinbaren Helligkeit eines Sterns am Nachthimmel auf die Absoluthelligkeit schließen und mit der Sonne vergleichen. Unsere Sonne entpuppt sich dabei als durchschnittlicher Stern unter zahllosen anderen Sternen mit vergleichbarer Strahlkraft, was den lange schwelenden Streit um die Mittelpunktspion im Weltall, die man zunächst der Erde und später der Sonne zudachte, geradezu lächerlich erscheinen lässt.

Die Kenntnis der Sternentfernung rückt also unsere Anschauung des mit bloßem Auge sichtbaren Kosmos erst ins rechte Maß und ermöglicht uns die Loslösung von antiken und mittelalterlichen Fehlvorstellungen, die auf zugegebenermaßen naheliegenden und verführerischen Grundannahmen über den Standort der Erde und über die Form, die Größe und den Aufbau des Weltalls basieren.

Die Bestimmung von Fixsternparallaxen ist heute mit Fernrohren und CCD-Kameras auch dem geübten Amateurastronomen möglich, jedoch eignet sich eine solche Prozedur, die ständige Messungen über ein Jahr hinweg erforderlich macht, um auch den Effekt der Aberration des Sternlichtes zu erfassen und diesen vom Parallaxeneffekt separieren zu können, nicht für den Einsatz im Physikunterricht.

Andere Techniken zur Bestimmung der Sternentfernung beruhen auf der Messung der Sternhelligkeit. Dies setzt die Kenntnis der absoluten Sternhelligkeit voraus, damit man aus der scheinbaren Helligkeit eines Sterns am Himmel auf seinen Abstand zum Sonnensystem schließen kann. Die absolute Helligkeit lässt sich aus den im Sternspektrum sichtbaren Spektrallinien, die Auskunft über die Zusammensetzung und den Entwicklungsstand des Sterns geben, ableiten. Die Abweichung der scheinbaren Helligkeit von der absoluten lässt sich allein aus dem Abstandseffekt erklären, der einen Stern mit einem Faktor ($1 / r^2$) schwächer erscheinen lässt, je größer der Abstand r wird. Diese verbreitete Methode der Abstandsbestimmung wird in den Lehrbüchern der Astronomie im Zusammenhang mit dem Hertzsprung-Russell-Diagramm, welches spektrale Eigenschaften von Sternen mit deren Absoluthelligkeiten in Verbindung bringt, diskutiert (Abb. 1).

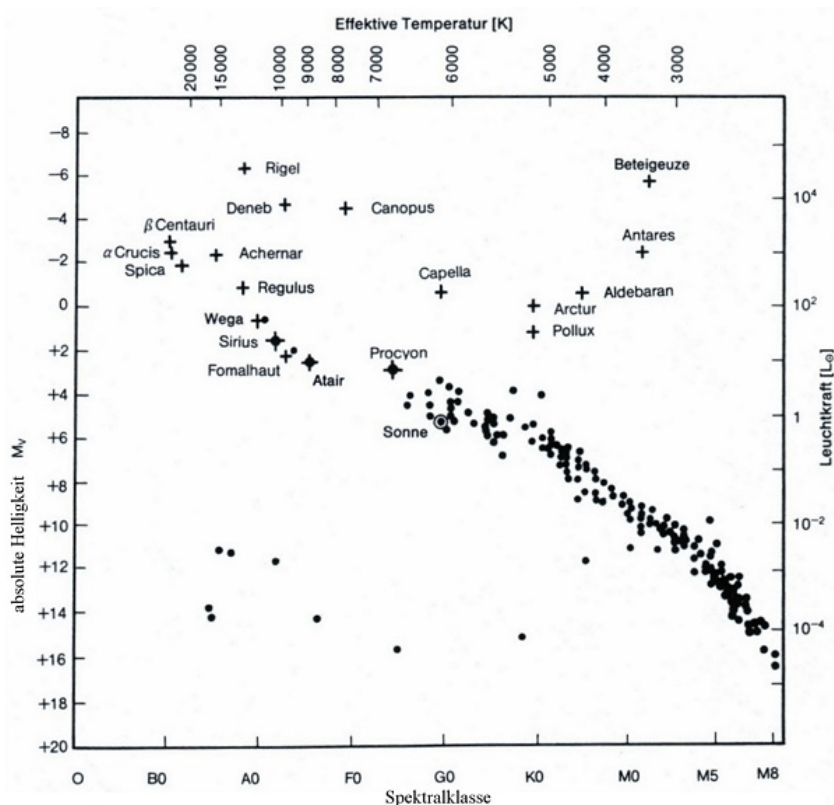


Abbildung 1: Hertzsprung-Russell-Diagramm der scheinbar hellsten Sterne (Kreuze) und der Sterne in einem Umkreis vom bis zu 10 parsec = 32,6 Lichtjahre (Punkte).

Das hier vorgestellte Projekt geht von einer identischen Absoluthelligkeit aller Sterne aus - eine Annahme die für die hellen gelben Sterne in unserer Umgebung einigermaßen zutrifft. Deren Absoluthelligkeiten unterscheiden sich zwar auch noch im Bereich von einigen wenigen Größenordnungen (siehe Abb. 1), jedoch führt dies in Anbetracht der Ungenauigkeiten des hier propagierten Messverfahrens nicht zu dramatisch falschen Ergebnissen. Es geht ja nicht um die genaue Abstandsbestimmung der einzelnen Sterne, sondern um eine generelle Abschätzung der typischen Sternentfernung, um eine Idee von der Weite des Sternenraumes auf der Basis eigener Messungen zu erlangen.

Damit wandelt man auf den Spuren von William Hyde Wollaston, der sich 1828 - 10 Jahre vor der Entdeckung der Fixsternparallaxe - mit dieser Methode befasste und deren erste Ergebnisse er kurz vor seinem Tod noch aufschrieb, verbunden mit der Aufforderung an die Nachwelt, diese Messungen nachzuholen, auszuweiten und die Methode noch zu verfeinern [1]. Für die astrophysikalische Forschung war seine Methode schon zu Bessels Zeiten obsolet, jedoch eignet sie sich hervorragend für den Physik- und Astronomieunterricht, weshalb sie hier wiederbelebt und empfohlen sei.

Das Silberkugelphotometer

Eine spiegelnde Kugel ("Silberkugel") kann als Photometer für Helligkeitsmessungen verwendet werden, weil man in der Kugel ein verkleinertes Bild einer flächigen Lichtquelle sieht, deren Helligkeitseindruck systematisch nach dem Abstandsgesetz ($1 / r^2$) verringert werden kann, wenn man die Beobachtungsentfernung r zur Silberkugel vergrößert. Dies setzt voraus, dass das menschliche Auge den Lichtreflex als punktförmig wahrnimmt, d.h. die scheinbare Bildgröße des Lichtquellenbildes im Kugelspiegel muss unterhalb der Auflösungsgrenze des menschlichen Auges von ca. 1 Bogenminute liegen. Könnte man das Bild der Lichtquelle räumlich auflösen, so wären dies Verhältnisse für Flächenlichtquellen gültig. Deren Leuchtdichte sinkt nicht mit Vergrößerung des Abstandes, auch wenn die integrierte Gesamthelligkeit auf allen Flächenelementen wegen des Abstandseffektes kleiner wird. Zur Kontrolle dieses Parameters der "Punktförmigkeit des Lichtquellenbildes" ist die Kenntnis der Abbildungseigenschaften des Kugelspiegels erforderlich. Man findet die entsprechenden Formeln in den Lehrbüchern der Physik im Bereich der geometrischen Optik, z.B. in [2].

Der Kugelspiegel mit Radius R hat eine Brennweite von $f = R/2$ und das Bild einer Lichtquelle im "Unendlichen" (z.B. die Sonne, die hinreichend viele Kugelradien von der Kugel entfernt steht, der eigentlichen Bedeutung des "Unendlichen" im Sinne der geometrischen Optik) hat die Größe $b = f * \tan \alpha$. Darin ist α der Winkelradius der Lichtquelle. Bei der Sonne ist $\alpha = 32'$. Bei Kugeln mit Radien im Zentimeterbereich (Stahlkugeln aus Kugellagern, kleine Christbaumkugeln, chinesische Gong-Kugeln, Deko-Kugeln aus dem Bastelgeschäft, ...) erhält man folglich als Durchmesser für das Sonnenbild in der Kugel rd. 0,1 mm. Schon bei der Betrachtung aus Abständen von weniger als einem Meter ist die punktförmige Erscheinung des Sonnenbildes gewährleistet. (Man kann aber auch diffus reflektierende Kugeln nehmen, wenn gewährleistet ist, dass die Kugel aus der Beobachtungsentfernung insgesamt punktförmig erscheint.)

Die Photometrie, d.h. die Messung der Helligkeit einer solchen Punktlichtquelle, basiert auf dem Vergleich des Lichtreflexes mit einer Bezugslichtquelle. Die Messung geschieht bei der Silberkugelphotometrie durch Abgleich der Helligkeiten der Bezugslichtquelle mit der zu messenden Punktlichtquelle durch Variation der Geometrie.

Bei der visuellen Beobachtung vermag man die Helligkeitsgleichheit von Lichtquellen recht gut festzustellen, während die quantitative Abschätzung von Helligkeitsunterschieden sehr schwierig ist. Der Wahrnehmungsapparat arbeitet nach logarithmischen Prinzipien, d.h. Reize, die sich um Größenordnungen unterscheiden, führen zu Sinneseindrücken, die sich

linear zueinander verhalten, d.h. ein 10-mal hellerer Stern führt zu einem etwa doppelten Helligkeitseindruck.

Um diese Schwierigkeit bei der Abschätzung des Absolutmaßes von Helligkeitsunterschieden bzw. -verhältnissen zu vermeiden, kommt als Abgleichkriterium bei der Messung nur der gleiche Helligkeitseindruck beider Lichtquellen in Frage. Man erreicht diesen Abgleich durch die Variation der Entfernungen zu dem Lichtquellen. Der Sonnenreflex erscheint je nach dem Beobachtungsabstand zur Kugel mehr oder weniger hell und auch die Helligkeit der Bezugslichtquelle lässt sich durch den Abstand zum Beobachter einstellen. Im Experiment sind demnach nur geometrische Größen zu erfassen: Die Größe der Kugel, die Beobachtungsentfernung zur Kugel, die Entfernung zur Bezugslichtquelle und ggf. die Entfernung der Bezugslichtquelle zur Kugel, wenn deren Spiegelreflex beobachtet werden soll.

Als fast punktförmige Bezugslichtquelle eignet sich die Birne einer kleinen oder mittleren Maglite-Taschenlampe. Der Reflektor muss abgeschraubt werden, um die gleichmäßige Ausbreitung des Lichtes in den gesamten Raumwinkel zu ermöglichen. Die Glühbirne einer Maglite-Taschenlampe ist an sich schon sehr klein (ca. 2 mm) und sie erscheint bereits aus einer Entfernung von nur wenigen Metern als punktförmig. Die isotrope Abstrahlung darf mit guter Näherung angenommen werden, während sich der gegenüber dem Sonnenlicht merklich rötere Farbeindruck der Taschenlampenbirne, was auf die gegenüber der Sonne geringere Oberflächentemperatur des Glühfadens zurückgeht, bei der Messung störend und verfälschend auswirkt.

Eine Verbesserung des hier beschriebenen Experimentes kann mit geeigneten Filtern zur Angleichung der Farbeindrücke von Sonne und Glühfaden versucht werden, eine Technik, auf die auch schon Wollaston verweist. Im Sinne einer möglichst Vereinfachung des Experiments wurde hier darauf verzichtet und der Makel der ungleichfarbigen Lichtquellen in Kauf genommen.



Abbildung 2:
Die als Vergleichslichtquelle ohne Reflektorschirm verwendete Maglite-Taschenlampe. Der Durchmesser des runden schwarzen Plättchens unterhalb der Glühbirne beträgt 13,5 mm.

Die Reduktion der Sonnenhelligkeit durch das Silberkugelphotometer bestimmt sich folgendermaßen. Es sei B die Intensität des direkten Sonnenlichtes und B_v die „verdünnte“ Intensität des Sonnenreflexes in der Silberkugel bei der Beobachtung aus der Entfernung r (gerechnet vom Ort des Sonnenbildes innerhalb der Kugel):

$$B_v = B \cdot \varepsilon \cdot \left(\frac{R}{2 \cdot r} \right)^2$$

Darin ist ε die Reflektivität des Kugelspiegels, die sich grob zu 0,5 abschätzen lässt und R der Radius der Silberkugel. Zur Erklärung dieser Formel sei Wollastons Gedankengang wiedergegeben: Das virtuelle Sonnenbild entsteht innerhalb der Kugel auf halbem Weg zwischen Kugelmittle und Kugelrand, weil die Brennweite $f = R/2$ ist und die Sonne aus dem "Unendlichen" scheint. (Dies folgt aus der Abbildungsgleichung für sphärische Spiegel, siehe [2]). Ein gedachter Beobachter am Rand der Kugel sieht das Bild der Größe $f \cdot \tan \alpha$ aus der Entfernung $f = R/2$ und folglich unter dem gleichen Sehwinkel α und - abgesehen von den Helligkeitseinbußen durch das nicht vollständige Reflexionsvermögen der Silberkugel - mit der gleichen Helligkeit, wie die Sonne vom Himmel herab scheint (Abb. 3).

Bei einer Entfernung r des Beobachterauges vom Sonnenbild in der Kugel verhält sich die scheinbare Größe des Bildes wie $(R/2) / r$, denn bei $r = R/2$ (Kugelrand) hat man den oben diskutierten Fall und bei allen größeren Entfernungen erhält man eine demgegenüber linear verkleinerte scheinbare Bildgröße. Die Intensität bzw. die Bestrahlungsstärke einer Fläche im Abstand r verhält sich wie üblich quadratisch mit der Entfernung und damit gelangt man zum obigen Ausdruck für B_v ($v = \text{"verdünnt"}$).

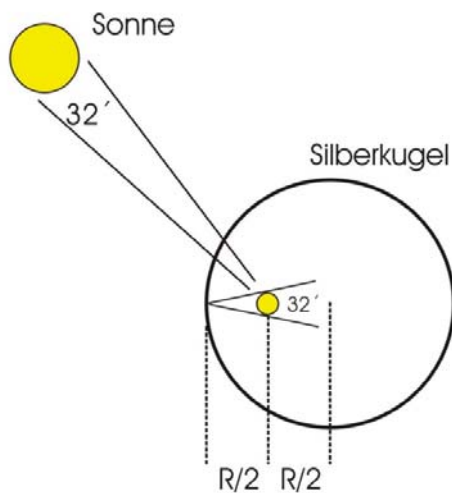


Abbildung 3: Das Sonnenbild entsteht auf halben Weg zwischen Mitte und Rand der Silberkugel und erscheint vom Kugelrand unter dem gleichen Sehwinkel, unter dem die Sonne direkt am Himmel gesehen werden kann.

Die Bestrahlungsstärke durch das Sonnenlicht (in W/m^2) an der Erdposition (genauer: oberhalb der lichtscluckenden Atmosphäre) wird "Solarkonstante" genannt. Sie berechnet sich aus der Leuchtkraft L der Sonne und dem Abstand zur Erde (Astronomische Einheit AE) zu:

$$B = \frac{L}{4\pi \cdot AE^2} = \frac{3,8 \cdot 10^{26} W}{4\pi \cdot (1,5 \cdot 10^{11} m)^2} = 1367 W / m^2$$

An einem sonnigen Tag kommt etwa die Hälfte dieser Leistung auf der Erdoberfläche an. Die Bestrahlungsstärke der Glühbirne (B_2) verhält sich bei isotroper Abstrahlung analog:

$$B_2 = \frac{L_2}{4\pi \cdot r_2^2}$$

Darin ist r_2 der Abstand des Beobachters zur Lampe und L_2 die Strahlungsleistung, die sich aus den elektrischen Größen der Taschenlampenbirne abschätzen lässt. Für die Bestimmung der Solarkonstante nach dieser Methode ist das erforderlich; für den Vergleich der Sonne mit der Sternhelligkeit, bei dem die Glühbirne nur als Zwischenmedium dient, deren Helligkeit sich wieder herauskürzt, ist das nicht nötig.

Der Abgleich $B_v = B_2$ erbringt die Strahlungsleistung der Glühlampe L_2 im Verhältnis zur Strahlungsleistung der Sonne L :

$$B \cdot \varepsilon \cdot \left(\frac{R}{2 \cdot r} \right)^2 = \frac{L_2}{4\pi \cdot r_2^2} \Leftrightarrow \frac{L}{4\pi \cdot AE^2} \cdot \varepsilon \cdot \left(\frac{R}{2 \cdot r} \right)^2 = \frac{L_2}{4\pi \cdot r_2^2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{L_2}{L} = \frac{r_2^2}{AE^2} \cdot \varepsilon \cdot \left(\frac{R}{2 \cdot r} \right)^2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{L_2}{L} = \frac{\varepsilon}{4 \cdot AE^2} \cdot \left(\frac{r_2 \cdot R}{r} \right)^2$$

Kennt man die Strahlungsleistung der Glühbirne und misst die beim Abgleich eingestellten geometrischen Größen, so lässt sich als Ergebnis die Strahlungsleistung der Sonne bzw. die Solarkonstante der Sonne gewinnen. Dies ist ein vom eigentlichen Ziel der Bemühungen unabhängiges Zusatzprojekt.

Ein Blick auf die letzte Teilformel verrät, dass bei allen Abgleichssituationen mit unterschiedlich großen Kugeln und verschiedenen Beobachtungsentfernungen der Klammerausdruck rechts immer auf den gleichen Wert führen sollte, wenn sich an der Bezugslichtquelle nichts ändert. Eine etwaige Abweichung von dieser geometrischen Systemkonstante von einem konstanten Wert liefert einen Hinweis auf die Güte des Abgleichs und die Qualität der visuellen Photometrie bei verschiedenen Skalen der Absoluthelligkeit der Punktlichtquellen, die bei dem relativen Helligkeitsabgleich ja eigentlich keine Rolle spielen sollte.

Abschätzung von Helligkeiten und zu erwartenden Ergebnissen vor der Messung

Da der Helligkeitsabgleich nicht mit einem Messinstrument, sondern mit dem menschlichen Auge erfolgt und es sich jeweils um punktförmige Lichtquellen handelt, ist es ratsam, Abschätzungen im astronomischen Helligkeitssystem der Größenklassen vorzunehmen. Hipparch teilte bereits im 2. Jahrhundert vor Christus die mit bloßem Auge sichtbaren Sterne in sechs Größenklassen ein. Hellste Sterne erhalten die erste Größenklasse, schwächste die sechste. Für das ursprüngliche qualitative Hipparch'sche System wurden physikalische und physiologische Kriterien zur genauen Quantifizierung gefunden und definiert. Dies wird in [3] beschrieben. Die helle Sonne hat eine Magnitude von -27. Der Vollmond -13, der Halbmond -10, die Venus im größten Glanz -4, Jupiter und Mars erreichen maximal -3, Sirius hat als hellster Stern -1,4 "Magnituden".

Sterne, die in der Helligkeit um fünf Größenklassen bzw. Magnituden differieren, unterscheiden sich in der Intensität um einen Faktor 100. Eine Differenz von einer Magnitude entspricht damit einem Helligkeitsverhältnis von $\sqrt[5]{100} = 2,512$. Für beliebige

Magnitudendifferenz Δm erhält man das Helligkeitsverhältnis V nach der folgenden Formel:

$$\Delta m = -2,5 \cdot \log V \quad \Leftrightarrow \quad V = 10^{-0,4 \cdot \Delta m} = 2,512^{\Delta m}$$

Das visuelle Größenklassensystem schließt Eigenschaften der menschlichen Wahrnehmung mit ein. So spielt z.B. auch die spektrale Verteilung des Lichtes eine Rolle bei der Frage, wie hell eine Lichtquelle dem Menschen erscheint. Deshalb ist es nicht ohne weiteres möglich, die photometrische Größe "visuelle Magnitude" unmittelbar in die radiometrische Größe "Bestrahlungsstärke" (in W/m^2) umzurechnen. Setzt man aber eine spektrale Verteilung ähnlich wie bei der Sonnenstrahlung voraus, so lässt sich folgende Umrechnungsformel sinnvoll verwenden (siehe auch [3,4]):

$$m = -2,5 \cdot \log \left(\frac{B}{2,52 \cdot 10^{-8} W / m^2} \right) \quad \Leftrightarrow \quad B = 2,52 \cdot 10^{-8} W / m^2 \cdot 2,512^m$$

Das Größenklassensystem ist hier von Vorteil, weil die durch die Silberkugel bewirkte Intensitätsverringering der Sonne oder Lampe sogleich in eine Magnitudendifferenz umgerechnet werden kann. Wie hell der "verdünnte" Lichtreflex erscheint, lässt sich dann durch den Vergleich mit Lichtquellen bekannter Magnitude (Venus, Vollmond etc.) schnell und anschaulich abschätzen. Im Folgenden wird untersucht, wie hell die Taschenlampenbirne und der Lichtreflex der Sonne in einer Silberkugel aus einer Entfernung von 300 Metern erscheinen. Schließlich ist noch interessant, bei welcher Geometrie der Lichtreflex der Taschenlampenbirne in der Silberkugel ähnlich hell erscheint wie ein Stern.

i) Helligkeit der Taschenlampenbirne aus einer Entfernung von 300 Metern

Die elektrische Leistung der Glühbirne beträgt ca. 10 Watt. Davon wird nur ein Anteil von ca. 3% in sichtbares Licht umgewandelt, der Rest in Wärme. Bei isotroper Abstrahlung erhält man damit für die Bestrahlungsstärke B der Birne in der Entfernung $r_2 = 300$ m:

$$B_2 = \frac{L_2}{4\pi \cdot r_2^2} = \frac{10 \text{ W} \cdot 0,03}{4\pi \cdot (300 \text{ m})^2} \approx 3 \cdot 10^{-7} \text{ W} / \text{m}^2$$

Die Sonne bestrahlt an einem Sommertag die Erdoberfläche mit ca. 600 W/m^2 und erscheint am Mittagshimmel als Stern der etwaigen Magnitude $m = -26$ (oberhalb der Atmosphäre $m = -27$; die Verringerung erklärt sich durch die Extinktion in der Lufthülle, die hier nur grob abgeschätzt wird). Welche Magnitude hat die Taschenlampe aus 300 Metern Entfernung? Dazu wandelt man das Intensitätsverhältnis in den Bestrahlungsstärken in eine Magnitudendifferenz um:

$$\Delta m = -2,5 \cdot \log V = -2,5 \cdot \log(3 \cdot 10^{-7} / 600) \approx 23$$

Diese Magnitudendifferenz addiert man zur Magnitude der Sonne, die hier als bekanntes Bezugsobjekt verwendet wird, hinzu und man erhält für die Magnitude der Glühbirne unter den gegebenen Voraussetzungen $m = -26 + 23 = -3$

Die Glühbirnenhelligkeit entspricht damit der eines Planeten im größten Glanz. Vor einem hellen Himmelshintergrund wird man sie nicht oder nur kaum ausmachen können, denn man kann tagsüber die Sterne i.a. nicht sehen. Es gibt allerdings gelegentliche Berichte von einer Tagessichtbarkeit der hellsten Sterne und Planeten, die - neben einer überdurchschnittlich empfindlichen und geübten Wahrnehmung - die genaue Kenntnis der Position der Lichtquelle am Himmel voraussetzt. Hier wird jedoch vom Regelfall der Unmöglichkeit einer Sternsichtung am Tage ausgegangen.

Bereits diese kleine Abschätzung zeigt, dass bei Beobachtungsentfernungen von einigen hundert Metern besondere Vorkehrungen hinsichtlich der Umgebungshelligkeit und des Beobachtungshintergrundes getroffen werden müssen. Deshalb wurden die Experimente in einem 600 m langen ausgedienten Tunnel durchgeführt, in dem man sich völlig sicher wöhnen darf, weil die einstmals vorhandenen Bahngleise schon wieder entfernt wurden.



Abbildung 4: Vor dem Tunneleingang



Abbildung 5: Silberkugelinstitution am Absperrgitter

Die Drahtgitterabspernung zum Tunnel ließ sich leicht überwinden (Abb. 4). Verschiedene Silberkugeln wurden am Tunneleingang vor einem schwarzen Tuch befestigt, welches bei der Beleuchtung durch die Sonne bei der Beobachtung aus der Tiefe des Tunnels heraus einen grauen lichthellen Eindruck abgab. Das Tuch ließ sich hervorragend an dem Absperrgitter anbringen, das wie für diesen Zweck gemacht schien (Abb. 5).

Man benötigt nicht unbedingt einen Tunnel, denn man kann die scheinbare Helligkeit der Glühbirne auch durch Annäherung an die Lampe erhöhen, bis man sie schließlich auch vor einem hellen Hintergrund sehen kann. Bei allen Helligkeitsvergleichen ist aber darauf zu achten, dass der Abgleich vor demselben Hintergrund erfolgt, da die Empfindlichkeit des Auges für den Nachweis von Punktlichtquellen sowohl von der Helligkeit der Quelle selbst, als auch von der Hintergrundhelligkeit abhängt (Abb. 6). Da eine zusätzliche Motivation des Experimentes darin lag, in dem Tunnel sternähnliche Lichtreflexe zu erzeugen, um seine Verwendbarkeit hinsichtlich einer am Tage sichtbaren Sternbildinstallation zu prüfen, wurde die Tunnelstrecke für die Experimente gewählt und die Helligkeit der Lichteindrücke so weit gedrosselt, dass man den subjektiven Eindruck eines naturähnlichen Sternbildes im Tunnel hatte.

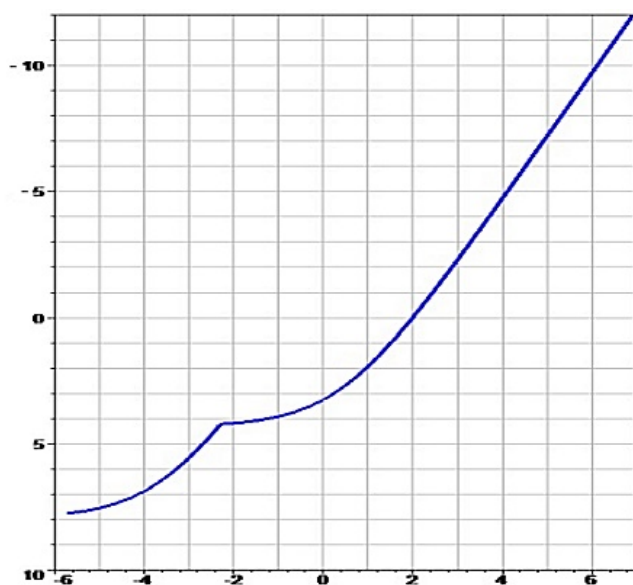


Abbildung 6: Schwelle für die Wahrnehmung einer Punktlichtquelle vor resthellem Hintergrund. Die Hintergrundhelligkeit ist logarithmisch in cd/m^2 auf der Rechtsachse angegeben (ein Wert von 2 entspricht 10^2 cd/m^2). Die Kurve gibt die Grenzmagnitude einer Punktlichtquelle an, die vor diesem Hintergrund noch erkannt werden kann. Wegen der Unterscheidung von Tagessehen (photopisch; mit den Zapfen) und Nachtsehen (skotopisch; mit den Stäbchen) besteht die Kurve aus zwei Teilstücken. Die Daten entstammen der Referenz [5], in der die Leuchtdichten allerdings in Nanolambert angegeben sind. Hier erfolgt die Angabe in cd/m^2 (zur Umrechnung siehe [6])

ii) Helligkeit des Sonnenreflexes in der Silberkugel aus 300 m Entfernung.

Wie hell erscheint der Sonnenreflex in der Silberkugel aus einer bestimmten Entfernung? - Nimmt man $R = 1 \text{ cm}$ für den Kugeldurchmesser und $r = 300 \text{ m}$ für die Entfernung an, so erhält man das folgende Helligkeitsverhältnis von Lichtreflex und Sonne.

$$V = \frac{B_v}{B} = \varepsilon \cdot \left(\frac{R}{2 \cdot r} \right)^2 \approx 10^{-10}$$

Es lässt sich in eine Magnitudendifferenz von $\Delta m = 25$ zur direkten Sonne umrechnen (pro Faktor 10^2 fünf Magnituden Differenz, also insgesamt $5 \cdot 5 = 25$ Magnituden). Damit erscheint der Reflex mit $m = -26 + 25 = -1$ ebenfalls wie ein Planet oder der helle Stern Sirius. Diese und die vorherige Abschätzung zeigen, dass man mit dieser Methode stern- bzw. planetenhelle Lichtpunkte in dem Tunnel erzeugen kann. Bei der Länge des Tunnels von 600 Metern ist ein Helligkeitsabgleich beider Lichtquellen durch Abstandsvariationen innerhalb des Tunnels gut möglich. Der Vergleich der in der Kugel reduzierten Bezugslichtquelle zu einem Stern muss natürlich nachts im Freien erfolgen. Die nächste Abschätzung gibt Aufschluss über die zu erwartende Geometrie bei diesem Experiment.

iii) Abschätzung für die Geometrie der Anordnung von Glühbirne, Silberkugelphotometer und Beobachter für den Abgleich des Lichtreflexes der Glühbirne mit einem hellen Stern

Die Helligkeit des Lichtreflexes in der Silberkugel hängt wieder ab von der Größe der Silberkugel (Radius R) und dem Abstand Kugel-Beobachter (r), nun aber auch noch vom Abstand der Birne zur Silberkugel (r_3), durch den die Bestrahlungsstärke der Glühbirne an der Stelle der Silberkugel geregelt wird.

Bei einem Abstand von $r_3 = 1 \text{ m}$ zwischen Birne und Kugel erscheint die Glühbirne an der Stelle der Kugel wie ein Stern der Magnitude $m = -16$ (die Berechnung erfolgt analog wie im Abschnitt i), wobei 300 m durch 1 m zu ersetzen ist). Das ist ca. 3 Magnituden bzw. ein Faktor 16 heller als der Vollmond mit $m = -13$. Beobachtet man nun den Reflex dieser Lichtquelle in der Kugel aus einem Abstand von 10 Metern, so verringert sich die Intensität um den folgenden Faktor.

$$V = \varepsilon \cdot \left(\frac{R}{2 \cdot r} \right)^2 \approx 0,5 \cdot \left(\frac{0,01 \text{ m}}{2 \cdot 10 \text{ m}} \right)^2 \approx 10^{-7}$$

Das entspricht ca. 17 Magnituden. Insgesamt erscheint der Lichtreflex also wie ein Stern der Magnitude $m = -16 + 17 = 1$. Der Reflex der Taschenlampenbirne, die die Kugel aus einer Entfernung von 1 m beleuchtet ähnelt aus 10 m Abstand folglich einem hellen Stern.

Die Abschätzungen haben Richtwerte für die Messgeometrien in den verschiedenen Fällen zum Ergebnis. Die Tagesmessungen erfolgen mit der Taschenlampe im Tunnel bzw. mit den Silberkugeln am Tunnelrand, wo sie von der Sonne beleuchtet werden. Durch die Wahl der geometrischen Parameter (Kugelgröße R , Abstand zur Kugel r , Abstand zur Taschenlampenbirne r_2) lassen sich Experimente an verschiedenen Stellen des Tunnels bei jeweils unterschiedlichen Bereichen der Absoluthelligkeit der zu vergleichenden Lichtquellen ausführen. Wenn das für die Wahrnehmung gleichheller Lichtreflexe irrelevant sein sollte, müsste das Ergebnis von der Absoluthelligkeit der Punktlichtquellen unabhängig sein.

Wie sich zeigen wird, ist das offensichtlich nicht ganz der Fall, und das ist ein Hinweis auf eine unterschiedliche Funktionsweise unserer Wahrnehmung bei verschiedenen Größenordnungen der Intensität des Reizes. Dabei wird das Kontrastverhältnis in Bezug auf die Hintergrundhelligkeit (d.h. der Unterschied zwischen hell und weniger hell bezogen auf den weniger hellen Hintergrund) relevant. Deshalb ist auch die Kenntnis der Hintergrundhelligkeit (hier: das sonnenbeschienene schwarze Tuch) von Interesse. Diese lässt sich anhand einiger Grundannahmen zumindest grob abschätzen, was im folgenden Teilabschnitt noch geschehen soll.

iv) Abschätzung der Hintergrundhelligkeit (der „Leuchtdichte“) des schwarzen Tuchs

Die Sonne bescheint eine Oberfläche, deren Flächennormale zur Sonne zeigt, mit etwa 600 W/m^2 (halbe Solarkonstante). Das Tuch, welches zur Lichtabschirmung unmittelbar hinter den im Tunnelexperiment verwendeten Silberkugeln angebracht wurde, hing senkrecht herab und wurde von der Mittagssonne beleuchtet, die in einer Höhe von ca. 60° stand. Die Sonnenstrahlen schließen demnach auch mit der horizontalen Flächennormalen des Tuchs einen Winkel von 60° ein und die effektive Bestrahlung der Tuchfläche ist geringer als bei senkrechter Inzidenz. Der Reduktionsfaktor ist $\cos 60^\circ = 0,5$. Das Sonnenlicht verliert folglich rd. eine weitere Magnitude durch diesen Effekt.

Demnach wird das Tuch ungefähr mit $m = -25$ beschienen. Nur ein geringer Teil dieses Lichtes wird von dem schwarzen Tuch zurückgestrahlt und sorgt für den resthellen Hintergrund, vor dem der Abgleich der Punktlichtquellen erfolgt. In den Tunnel mögen vielleicht 5 - 10% der auftreffenden Intensität reflektiert werden. Ein Quadratmeter des Tuches strahlt folglich $600 \text{ W} \cdot 0,5 \cdot (0,05 \dots 0,10) = 15 \dots 30 \text{ W}$ in den Tunnel hinein (Abb. 7).

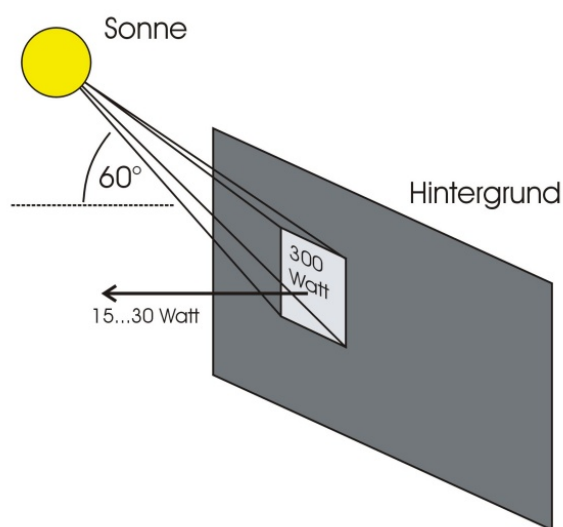


Abbildung 7: Ein Quadratmeter des schwarzen Tuchs wird mit ca. 300 Watt bestrahlt und reflektiert ca. 15 bis 30 Watt zurück.

Wie groß ist dann die Leuchtdichte des Tuches, die den Schwellenwert für die Sichtbarkeit einer Punktlichtquelle festlegt (siehe Abb. 4)? – Die Einheit der Leuchtdichte ist cd/m^2 . Man muss zur Ermittlung der Leuchtdichte des resthellen schwarzen Tuchs die reflektierte Strahlungsleistung folglich in ein Kerzenäquivalent umwandeln. Die Candela ist als Lichtstrom einer Kerze definiert, die bei einer Wellenlänge von 555 nm (grün) $1/683$ Watt in jede Raumwinkeleinheit abstrahlt.

Mit den folgenden Grobabschätzungen gelingt nun die Umwandlung: Das Maximum der Sonnenintensität liegt ebenfalls im grünen Bereich, wodurch die direkte Umrechnung in Candela gerechtfertigt ist. Die spektrale Verteilung wird natürlich bei der Reflektion am schwarzen Tuch in hier unbekannter Weise verändert, aber dennoch wird in Ermangelung besseren Wissens entsprechend der Candela-Definition jedes Watt reflektierter Intensität in ein Kerzenäquivalent umgewandelt, unabhängig von der tatsächlichen spektralen

Charakteristik. Aus dem Tunnel erscheint das schwarze Tuch in hellem Grau! Auch der fast schwarze Mond erscheint am Nachthimmel gelblich-weiß, und sein Spektrum ähnelt dem der direkten Sonne, was als Rechtfertigung für diese vereinfachende Annahme bezüglich der spektralen Charakteristik des vom Tuch zurückgestrahlten Lichts reichen mag.

Auch die Abstrahlcharakteristik des schwarzen Tuchs ist unbekannt. Die einfachste Annahme ist die einer isotropen Abstrahlung der reflektierten Intensität in den Halbraum mit Raumwinkel $2\pi = 6,28$ Steradian (sr). Damit schätzt man schließlich den Lichtstrom eines Quadratmeters des schwarzen Stoffes folgendermaßen ab:

$$\frac{(15...30 \text{ W})}{6,28 \text{ sr}} \cdot 683 \frac{\text{cd}}{\text{W}} \approx 1600...3200 \text{ cd}$$

Die Leuchtdichte (in cd/m^2) beträgt entsprechend 1600 bis 3200, weil die Rechnung von vornherein auf einen Quadratmeter bezogen wurde. Wegen der Vielzahl grober Abschätzungen ist es ratsam, die Ober- und Untergrenze der vermeintlichen Leuchtdichte des Tuchs jeweils auf die nächsthöhere bzw. nächsttiefere Größenordnung auszudehnen, damit man sich einigermaßen sicher sein kann, dass die Abschätzung vertrauenswürdig ist. Man erhält damit als Schätzbereich für die Leuchtdichte L des sonnenbeschienenen schwarzen Tuchs:

$$L \approx 10^2 \dots 10^4 \frac{\text{cd}}{\text{m}^2}$$

Ist das ein sinnvolles Ergebnis? - Das wird sich anhand der Sichtbarkeitsschwelle (der "Grenzmagnitude") für die beobachteten Punktlichtquellen im Tunnel erst noch zeigen.

Das erste Telexperiment - Vergleich der Sonne mit der Glühbirne im Tunnel

Die Vorgehensweise bei der Durchführung dieses Telexperiments im Tunnel ist schon im vorangegangenen Abschnitt hinreichend beschrieben, weshalb hier gleich das Augenmerk auf die Messung, das Messergebnis und die Auswertung gelenkt werden soll. Die Messung erfolgte am 6.06.2006 zwischen 12.50 Uhr und 14 Uhr mit Schülern der Astro-AG des Carl-Fuhlrott-Gymnasiums in Wuppertal unter der Leitung von Lehrer Michael Winkhaus und dem Autor. Einige Schüler waren mit dem Transport der Bezugslichtquelle im Tunnel und der Längenmessung beschäftigt, während der Helligkeitsabgleich von einer zweiten Gruppe durchgeführt wurde, bei der jeweils Einvernehmlichkeit durch Ausprobieren und Diskussion hergestellt wurde (also kein individueller Abgleich von verschiedenen Beobachtern).



Abbildung 8: Beobachtung der Silberkugelinstitution aus verschiedenen Entfernungen. Im mittleren und rechten Teilbild ist auch jeweils die rötliche Bezugslichtquelle zu sehen, die in einer solchen Entfernung postiert ist, dass ihre Helligkeit jeweils dem Sonnenreflex in der linken Kugel entspricht.

Es wurde mit verschiedenen Kugeln und verschiedenen Beobachtungsentfernungen experimentiert. Beim Helligkeitsvergleich kamen auch ein Fernglas und eine Digitalkamera zum Einsatz, mit der man ebenfalls recht gut den gleichhellen Lichteindruck anhand der Größe und Helligkeit der Lichtpunkte auf dem kleinen Bildschirm abschätzen kann. Bei der Auswertung des ersten Telexperimentes ist das Verhältnis der Strahlungsleistung der Sonne L und der Strahlungsleistung der Taschenlampenbirne L_2 von Interesse. Es lässt sich aus den geometrischen Faktoren berechnen:

$$\frac{L_2}{L} = \frac{\varepsilon}{4 \cdot AE^2} \cdot \left(\frac{r_2 \cdot R}{r} \right)^2$$

Die folgende Tabelle enthält die Messdaten und das Ergebnis für den Klammerausdruck in der obigen Formel für jede Einzelmessung. Der Übersichtlichkeit halber ist das Ergebnis als Kehrwert einer großen Zahl angegeben, die bis auf volle Hunderter gerundet ist.

<i>Kugelradius</i> <i>R in m</i>	<i>Abstand K-B</i> <i>r in m</i>	<i>Abstand L-B</i> <i>r₂ in m</i>	$(r_2 \cdot R / r)^2$ <i>in m²</i>	<i>K: Kugel; B: Beobachter; L: Lampe</i>
0,03	514	60	1/ 81500	
0,03	314	54	1/ 37600	
0,03	214	32	1/ 49700	
0,03	144	16	1/ 90000	
0,03	114	13	1/ 85400	
0,03	64	6	1/126400	
0,05	514	42	1/ 59900	
0,05	314	33	1/ 36200	
0,05	214	20	1/ 45800	
0,05	144	9	1/102400	
0,05	114	6	1/144400	
0,05	64	3	1/182000	
0,04	514	48	1/ 71700	
0,04	314	49	1/ 25700	
0,04	214	24	1/ 49700	
0,04	144	13	1/ 76700	
0,04	114	11	1/ 67100	
0,04	64	5	1/102400	
0,022	214	54	1/ 32400	
0,022	164	28	1/ 70900	
0,0125	214	83	1/ 42500	
0,0125	164	60	1/ 47800	

Tabelle 1: Messergebnisse des ersten Teilexperiments - Helligkeitsabgleich von Lampe und Sonnenreflex in Silberkugeln verschiedener Größe im Tunnel

Alle Ergebniszahlen (Ausdrücke im Nenner) für den geometrischen Faktor $(r_2 \cdot R / r)^2$ bewegen sich innerhalb einer Größenordnung. Mittelt man die Einzelergebnisse, so erhält man $1 / (74000 \pm 8300)$. Im Rahmen der angestrebten Genauigkeit von einer Größenordnung ist der geometrische Faktor wie erwartet als konstant zu betrachten. Der Fehler des Mittelwertes (1 Standardabweichung) liegt aber nur im Bereich von 10% und deshalb hinterlässt die Tabelle auch den Eindruck, dass es einen Trend zu höheren Nennern bei geringeren Kugelabständen - und damit helleren Punktlichtern beim Abgleich - gibt. Beim kleinsten Abstand von 64 Meter zwischen Kugel und Beobachter erhält man immer auch die größte Zahl im Nenner. Dies könnte darauf hindeuten, dass die Wahrnehmung beim Vergleich von helleren Lichtpunkten etwas anders funktioniert als bei schwächeren, sternähnlicheren Lichtpunkten.

Beim Experiment ließ sich außerdem noch feststellen, dass der Abgleich zwischen helleren Lichtpunkten nicht derart empfindlich möglich ist, wie bei insgesamt schwächeren. Bei kleinen Kugelabständen war der Prüfbereich des Lampenabstands, innerhalb dessen für den Helligkeitsabgleich durch ein Hin und Her der Lampe zu testen war, nur dezimetergroß, während bei größeren Entfernungen zur Kugel dieser Abstimmungsbereich etliche Meter betrug.

Legt man den Mittelwert von $1 / 74000$ für den konstanten geometrischen Faktor zugrunde, so erhält man das folgende Ergebnis für das Verhältnis der Strahlungsleistung von Glühlampe und Sonne:

$$\frac{L_2}{L} = \frac{\varepsilon}{4 \cdot AE^2} \cdot \left(\frac{r_2 \cdot R}{r} \right)^2 \approx \frac{0,5}{4 \cdot (1,5 \cdot 10^{11} \text{ m})^2} \cdot \frac{1}{74000} \text{ m}^2 \approx 10^{-28}$$

Mit der Schätzung von 3% von 10 W elektrischer Leistung für die Strahlungsleistung der Glühbirne im optischen Bereich erhält man für die Sonnenleistung $3 \cdot 10^{27}$ W, was genau eine Größenordnung über dem Literaturwert liegt. Für die Solarkonstante erhält man einen entsprechend höheren Wert von rd. 10000 W/m². Angesichts der Einfachheit des Experimentes und der groben Abschätzung der unbekannt Parameter kein schlechtes Zeugnis für die Qualität der visuellen Silberkugelphotometrie! Die Methode funktioniert.

Der größte Fehler in der Abschätzung der Solarkonstante liegt in der Unkenntnis der Strahlungseigenschaften der Glühwendel, die hier nur grob abgeschätzt sind. Bei der Bestimmung der Sternentfernung, dem eigentlichen Ziel des Projektes, kürzt sich die Strahlungsleistung der Bezugslichtquelle wieder heraus, und das Endergebnis ist von diesem Fehler nicht befallen.

Oder man setzt die Strahlungsleistung der Sonne als konstant voraus und ermittelt so die tatsächliche Strahlungsleistung der Glühlampe im visuellen Bereich. Man erhält dann:

$$L_2 \approx 3,8 \cdot 10^{26} \text{ W} \cdot \frac{0,5}{4 \cdot (1,5 \cdot 10^{11} \text{ m})^2} \cdot \frac{1}{74000} \text{ m}^2 \approx 0,03 \text{ W}$$

Als letztes Ergebnis des Tunnelexperimentes lässt sich noch die Grenzhelligkeit vor dem resthellen Tuch bestimmen. Die Tabelle gibt ungefähren Aufschluss über die maximalen Entfernungen, aus denen noch ein Lichtreflex in der Silberkugel zu sehen war. Bei den größeren Kugeln (R = 3, 4 oder 5 cm) lag die maximale Entfernung im Bereich der Tunnellänge von 600 Metern, bei den kleineren Kugeln (R = ca. 2 cm und 1 cm) waren dies ca. 300 Meter und die Sonnenreflexe aus kleinere Kugellagerkugeln (R im Bereich von Millimetern) waren nur aus maximal rd. 100 Metern Entfernung zu sehen. Für drei dieser Fälle soll die Magnitude des Reflexes bestimmt werden.

1) R = 3 cm, r = 600 m

$$V = \varepsilon \cdot \left(\frac{R}{2 \cdot r} \right)^2 \approx 3 \cdot 10^{-10} \Rightarrow \Delta m = -2,5 \cdot \log V \approx 24 \Rightarrow m_{\text{Grenze}} \approx -26 + 24 = -2$$

2) R = 1 cm, r = 300 m

$$V \approx 1 \cdot 10^{-10} \Rightarrow \Delta m \approx 25 \Rightarrow m_{\text{Grenze}} \approx -26 + 25 = -1$$

3) R = 2 mm, r = 100 m

$$V \approx 5 \cdot 10^{-11} \Rightarrow \Delta m \approx 26 \Rightarrow m_{\text{Grenze}} \approx -26 + 26 = 0$$

Die Grenzmagnitude für die Sichtung von Punktlichtquellen vor dem schwarzen Tuch aus dem Tunnel heraus liegt demnach bei $m_{\text{Grenze}} = -2 \dots 0$. Das entspricht sehr hellen Sternen oder Planeten. Eine nächtliche Beobachtungssituation mit einer typischen Grenzmagnitude von $m = 5$ kann im Tunnel also nicht realisiert werden. Die Verhältnisse entsprechen denen in der Dämmerung, wenn in der ersten Stunde nach Sonnenuntergang die Planeten und hellen Sterne sichtbar werden.

Ein Blick auf die Abbildung 6 verrät nun sofort, ob die Abschätzung der Leuchtdichte des schwarzen Tuchs vernünftig war. Die Kurve in Abbildung 6 stellt ja genau den Verlauf der Grenzmagnitude gegen die Leuchtdichte des Hintergrundes dar. Der Grenzmagnitudenbereich von 0 bis -2 (experimentell bestimmte Grenzmagnitude) fällt in den Leuchtdichtebereich von 10^2 bis 10^3 cd/m² (das Diagramm ist auf der Rechtsachse logarithmisch; ein Wert von 2

entspricht 10^2 cd/m^2). Die Bestimmung der Grenzmagnitude aus der Beobachtung von Lichtreflexen im Tunnel ist damit völlig konsistent mit den Berechnungen der Leuchtdichte auf der Basis einfacher Abschätzungen ($10^2 \dots 10^4 \text{ cd/m}^2$), die gemäß des in physiologischen Experimenten bestimmten Kurvenverlaufs zu einer Vorhersage für die Grenzhelligkeit im Bereich von 0 bis 5 Magnituden führen.

Das zweite Telexperiment - Vergleich eines Sterns mit der Glühlampe im Freien

Im zweiten Telexperiment wird das Verhältnis der Strahlungsleistung des Sterns zu der der Glühlampe bestimmt. Dazu wird ein Reflex der Glühlampe im Kugelspiegel beobachtet und mit dem Stern in direkter Ansicht vor dem Himmelshintergrund verglichen. Die geometrischen Größen, die hierbei zu messen sind, sind wieder der Kugelradius R , der Abstand des Beobachters zur Kugel r' und der Abstand der Lampe zur Kugel r_3 . Die Strahlungsleistung der Glühlampe wird wie zuletzt mit L_2 bezeichnet. Für die Bestrahlungsstärke des Lampenreflexes (B_3) an der Stelle des Beobachters erhält man:

$$B_3 = \frac{L_2}{4\pi \cdot r_3^2} \cdot \varepsilon \cdot \left(\frac{R}{2 \cdot r'} \right)^2$$



Abbildung 9: Installation für den Vergleich der Taschenlampenbirne mit der Sternhelligkeit. Die Taschenlampe steht in einem Lampenhaus, das bei der Beobachtungssituation (rechtes Teilbild) den direkten Blick auf die helle Birne versperrt. In der Nähe der Lampe befinden sich Silberkugeln verschiedener Größe, die einen Spiegelreflex der Lampe versenden, der aus einer Entfernung von einigen Metern Sternhelligkeit aufweist.

Diese wird mit der Bestrahlungsstärke des Sterns, die sich durch die Strahlungsleistung des Sterns L_* und die Sternentfernung r_* ausdrücken lässt, zum Abgleich gebracht ($B_3 = B_*$):

$$B_3 = B_* = \frac{L_*}{4\pi \cdot r_*^2}$$

⇔

$$\frac{L_*}{4\pi \cdot r_*^2} = \frac{L_2}{4\pi \cdot r_3^2} \cdot \varepsilon \cdot \left(\frac{R}{2 \cdot r'}\right)^2$$

⇔

$$V = \frac{L_*}{L_2} = \frac{r_*^2}{r_3^2} \cdot \varepsilon \cdot \left(\frac{R}{2 \cdot r'}\right)^2 = \frac{\varepsilon \cdot r_*^2}{4} \cdot \left(\frac{R}{r_3 \cdot r'}\right)^2$$

Einige Probemessungen erfolgten im März 2007 anhand der in Abbildung 9 gezeigten Versuchsanordnung. Bei den gewählten kleinen Kugeln erwiesen sich die zu bestimmenden Längen als sehr kurz, was den genauen Abgleich mit der Sternhelligkeit mittels Abstandsvariation erschwerte. Das merklich rottere Licht der Taschenlampenbirne erwies sich erneut als Unsicherheitsfaktor beim Helligkeitsabgleich. Der Abgleich ist ferner erschwert, wenn zwischen dem Stern und dem Lichtreflex ein großer Winkelabstand bei der Beobachtung besteht, und die Lichtpunkte deshalb nicht simultan beobachtet werden können. In der ersten Probemessung wurde der Lichtreflex mit den Sternen Procyon ($m = 0,40$) und Pollux ($m = 1,16$) zum Abgleich gemacht. Obwohl Procyon merklich heller erscheint als Pollux war beim Abgleich des Lichtreflexes nicht eindeutig feststellbar, ob bei dem gewählten Beobachtungsabstand der rötliche Lichtreflex näher an der Procyon- oder Polluxhelligkeit lag, so dass der Helligkeitsunterschied dieser Sterne von 0,76 Magnituden als etwaige Auflösungsgrenze für die visuellen Photometrie unter diesen besonderen Umständen angesehen werden kann.

Für den viel helleren Sirius ($m = -1,44$) ließ sich aber eindeutig eine andere Abgleichgeometrie bei ansonsten unveränderten Umständen feststellen, so dass es sich bei den Unterschieden der beiden Probemessungen um einen tatsächlichen Effekt unterschiedlicher Sternhelligkeiten handelt. Der Fehler bei der Bestimmung der Beobachtungslänge liegt im Bereich von 10-20%, der genaue Fehler aufgrund der unterschiedlichen Farbe ist unbekannt.

Das Siriusergebnis entspricht gemäß der Grundannahme der Methode, alle Sterne seien gleich hell, dem geringsten Sternabstand. Procyon Pollux zählen dagegen zu einer schon größeren Population sehr heller Sterne, die eher als Standard zur Bestimmung der typischen Sternentfernung herangezogen werden sollte, als die besondere Ausnahme des sehr hellen Sirius. Im Folgenden wird deshalb das Ergebnis der ersten Probemessung in die Bestimmung des Endergebnisses einfließen.

<i>Kugelradius</i>	<i>Abstand K-B</i>	<i>Abstand L-K</i>	$(R/r_3 \cdot r')^2$	<i>K: Kugel; B: Beobachter; L:Lampe</i>
<i>R in m</i>	<i>r' in m</i>	<i>r₃ in m</i>	<i>in m²</i>	
0,0125	5	0,27	1/ 11700	Abgleich mit Procyon, Kastor, Pollux
0,0125	3	0,23	1/ 3000	Abgleich mit Sirius

Tabelle 2: Messergebnisse des zweiten Telexperiments - Helligkeitsabgleich von Lampenreflex und Stern

Kombination beider Teilergebnisse zum Endergebnis

Die Teilergebnisse haben jeweils das Verhältnis der Strahlungsleistungen der Sonne L bzw. des Sterns L_3 zur Bezugslichtquelle L_2 erbracht. Für die Bestimmung der Sternentfernung wird das Verhältnis der Strahlungsleistungen von Sonne und Stern benötigt, dass sich als Quotient aus den beiden Teilergebnissen ergibt:

$$V = \frac{L_*}{L} = \frac{L_2/L}{L_2/L_*} = \frac{L_2}{L} \cdot \frac{L_*}{L_2} = \left[\frac{\varepsilon}{4 \cdot AE^2} \cdot \left(\frac{r_2 \cdot R}{r} \right)^2 \right] \cdot \left[\frac{\varepsilon \cdot r_*^2}{4} \cdot \left(\frac{R}{r_3 \cdot r'} \right)^2 \right] = 1$$

Weil voraussetzungsgemäß die Sterne die gleiche Strahlungsleistung wie die Sonne haben (sollen), setzt man für dieses Verhältnis die 1 an. Die Vereinfachung des Ausdrucks und die Auflösung nach r_* liefert nun die Endformel für die Sternentfernung:

$$1 = \left[\frac{\varepsilon}{4 \cdot AE^2} \cdot \left(\frac{r_2 \cdot R}{r} \right)^2 \right] \cdot \left[\frac{\varepsilon \cdot r_*^2}{4} \cdot \left(\frac{R}{r_3 \cdot r'} \right)^2 \right] = \frac{\varepsilon^2}{16} \cdot \frac{r_*^2}{AE^2} \cdot \left(\frac{r_2 \cdot R^2}{r \cdot r_3 \cdot r'} \right)^2$$

⇔

$$r_* = AE \cdot \frac{4}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{r \cdot r_3 \cdot r'}{r_2 \cdot R^2} \right)$$

Eigentlich erstaunlich, dass sich die Sternentfernung (in Beziehung zur astronomischen Einheit) nun nur noch - abgesehen von der Kugelreflektivität - durch leicht kontrollierbare geometrische Einheiten darstellt, die allesamt mit dem Maßband und der Schieblehre zugänglich sind! Man muss allerdings acht geben, dass man sich mit den vielen Abständen und Bezeichnungen nicht verheddert. Deshalb sind hier alle nochmals systematisch aufgelistet:

r_* : gesuchte Sternentfernung

AE : astronomische Einheit = bekannte Sonnenentfernung

R : Kugelradius

r : Abstand Beobachter – Kugel bei der Tunnelmessung (Sonnenreflex in der Kugel)

r' : Abstand Beobachter – Kugel bei der Messung im Freien (Lampenreflex in der Kugel)

r_2 : Abstand Beobachter – Lampe bei der Tunnelmessung

r_3 : Abstand Lampe – Kugel bei der Messung im Freien

Falls die Helligkeitsvergleiche nicht mit der gleichen Kugel gemacht worden sind, so muss man noch die unterschiedlichen Kugelradien unterscheiden. Man zerlegt R^2 dann in das Produkt $R_1 \cdot R_2$, wobei R_1 der Radius der Kugel bei der Sonnenmessung im Tunnel und R_2 der Kugelradius bei der Sternmessung im Freien ist. Ratsam ist auch noch die Zerlegung des geometrischen Faktors (der Klammerausdruck in der Ergebnisformel) in die zwei unabhängigen geometrischen Konstanten der zwei Teilergebnisse, für die jeweils die Mittelwertbildung und Fehlerrechnung erfolgt. Man erhält damit:

$$r_* = AE \cdot \frac{4}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{r}{r_2 \cdot R_1} \right) \cdot \left(\frac{r_3 \cdot r'}{R_2} \right) = AE \cdot \frac{4}{\varepsilon} \cdot const_1 \cdot const_2$$

Die Teilergebnisse ergeben $const_1 = \sqrt{74000} \approx 270$ und $const_2 = \sqrt{11700} \approx 108$.

Die Sternentfernung bestimmt sich damit zu:

$$r_* = AE \cdot \frac{4}{0,5} \cdot 270 \cdot 108 \approx 2,3 \cdot 10^5 AE ; (\text{Siriusentfernung} = 8 \cdot 270 \cdot 55 \cdot AE \approx 119000 AE)$$

Anschaulicher wird das Ergebnis erst durch die Umrechnung in Lichtjahre (Lj). Die Astronomische Einheit beträgt 500 Lichtsekunden (Ls) und für die Jahreslänge nimmt man den leicht zu merkenden Näherungswert von $3 \cdot 10^7$ Sekunden:

$$r_* \approx 2,3 \cdot 10^5 \cdot 500 Ls \cdot \frac{1 a}{3 \cdot 10^7 s} \approx 3,8 Lj \quad (\text{Siriusentfernung} \approx 1,9 LJ)$$

Wollaston kommt zu einer Siriusentfernung von 141000 AE bzw. rd. 2,3 Lichtjahren. Ein Großteil der Diskrepanz zum tatsächlichen Wert von 8,6 Lichtjahren ist natürlich der um den Faktor 21 größeren absoluten Sirius'helligkeit gegenüber der Sonne geschuldet, wie wir heute wissen. Angesichts der methodischen Unzulänglichkeiten (das Problem mit der Sternfarbe sei nochmals genannt) und den generellen Grenzen der visuellen Photometrie, die weder bei Wollaston noch hier in einer systematischen Fehleranalyse vollständig erfasst sind, mag die sehr gute Entsprechung des Siriusergebnis bei Wollaston und dem hier beschriebenen Experiment als Zufall gewertet werden.

Zum Abschluss sei das Ergebnis mit bekannten Literaturwerten verglichen. Bei der Sternmessung wurden nur besonders helle Sterne angepeilt. Deshalb werden für den Vergleich auch nur einige der hellsten Sterne herangezogen, nämlich die, die auch im Hertzsprung-Russell-Diagramm der Abbildung 1 namentlich benannt sind. Die folgenden Daten für ihre Absolut'helligkeiten in Relation zur Sonne und ihre Entfernungen basieren auf Parallaxenmessungen des Hipparcos-Satelliten [7]. Die Absolut'helligkeit M (die Stern'helligkeit bezogen auf einen einheitlichen Beobachtungsabstand von 10 parsec (pc); $1 \text{ pc} = 1 \text{ AE} / \tan 1''$) berechnet sich nach der folgenden Formel:

$$M = m + 5 \cdot \log \pi + 5$$

Sie basiert auf den vom Hipparcos-Satelliten bestimmten Fixsternparallaxen, deren Wert typischerweise auf ca. $0,0003''$ genau ist. Aus der Parallaxe π (gemessen in Bogensekunden) bestimmt man die Sternentfernung nach der Formel $r_* = 1 \text{ AE} / \tan \pi$.

Die Entfernung zu den Sternen ist mitnichten so präzise bekannt, wie die letzte Spalte der Tabelle 3 dies suggeriert. Der Bestimmungsfehler in der Parallaxe von z.B. Deneb wirkt sich bei der Kleinheit der Parallaxe von Deneb dramatisch im Endergebnis aus. Deneb könnte auch nur 2500 Lichtjahre entfernt sein, was natürlich auch ein verändertes Ergebnis bei der Absolut'helligkeit zur Folge hat.

Das absolute Verhältnis der Stern'helligkeit zur Sonnen'helligkeit erhält man aus:

$$V = 2,512^{\Delta M} ; \text{ mit } \Delta M = M_{\text{Sonne}} - M_{\text{Stern}}$$

Stern	m	M	V	π in ''	r^* in L _j
Sirius	-1,44	1,45	21	0,379	8,6
Canopus	-0,62	-5,53	12829	0,010	325,8
Arktur	-0,05	-0,31	105	0,089	36,6
α Centauri	-0,01	4,34	1,4	0,742	4,4
Wega	0,03	0,58	46	0,129	25,3
Capella	0,08	-0,48	122	0,077	42,3
Rigel	0,18	-6,69	37344	0,004	814,9
Procyon	0,40	2,68	2,7	0,286	11,4
Beteigeuze	0,45	-5,14	8958	0,008	407,4
Achernar	0,45	-2,77	1010	0,023	141,7
β Centauri	0,61	-5,42	11593	0,006	543,2
Atair	0,76	2,20	10,4	0,194	16,8
α Crucis	0,77	-4,19	3734	0,010	325,9
Aldebaran	0,87	-0,63	141	0,050	65,2
Spika	0,98	-3,55	2071	0,012	271,6
Antares	1,06	-5,28	10191	0,005	651,9
Pollux	1,16	1,09	29	0,097	33,6
Fomalhaut	1,17	1,74	16	0,130	25,1
Deneb	1,25	-8,73	244492	0,001	3259
Sonne	-26,83	4,74		---	500 L _s

Tabelle 3: Daten für die Helligkeiten und Entfernungen der hellsten Sterne aus dem Hipparcos-Katalog

Die meisten hellen Sterne sind deutlich heller als die Sonne, was ein schlechtes Licht auf die Grundannahme wirft. Zieht man alle Sterne im Umkreis von 10 parsec zu Rate, so zählt die Sonne aber eher zu den lichtstärkeren und es gibt zahlreich Sterne, die einige Größenordnungen schwächer sind als die Sonne (schwarze Punkte in Abbildung 1).

Man kann natürlich das tatsächliche Helligkeitsverhältnis eines Sterns zur Sonne bei der Auswertung der photometrischen Messungen mit berücksichtigen und versuchen, auf diese Weise bessere Werte für individuelle Sternentfernungen zu erhalten. Andererseits stellt dieses Vorgehen auch das ganze Verfahren in Frage, denn die Kenntnis der Absoluthelligkeit der Sterne basiert ja auf der Abstandsbestimmung nach der geometrischen Parallaxenmethode. Folglich setzt man den Abstand bereits als bekannt voraus, wenn man das genaue Helligkeitsverhältnis bei der Auswertung benutzt.

Fazit

Die Silberkugelphotometrie bietet eine didaktisch interessante Möglichkeit zur Bestimmung der Größenordnung der Sternentfernung auf denkbar einfachstem Weg ohne jeden apparativen Aufwand. Ergebnis für diese wichtige Skala der kosmischen Entfernungsleiter sind rd. 1 ... 10 Lichtjahre. Für eine Bestimmung individueller Sternabstände eignet sich die Methode nicht, weil dies die Kenntnis der Absoluthelligkeit eines Sterns voraussetzt, die i. a. selbst auf einer Abstandsbestimmung basiert (methodischer Zirkelschluß).

Referenzen

- [1] W.H. Wollaston: On a method of comparing the light of the sun with that of the fixed stars; Phil.Trans.Roy.Soc., Vol. 119 (1829), 19-27
- [2] Gerthsen, Kneser, Vogel: Physik;
- [3] B. Steinrücken: Ein neuer Mond am Himmel?; pdf-Dokument auf www.sternwarte-recklinghausen.de
- [4] E. Hörber: Wäre nicht das Auge sonnenhaft ...; Astronomie + Raumfahrt 35 (1998) 2, 15-17
- [5] B.E. Schaefer: Telescopic Limiting Magnitudes; Publ. Astr. Soc. Pac. 102 (Feb. 1990), 212-229
- [6] $1 \text{ nla} = 3,18 \cdot 10^{-6} \text{ cd/m}^2$
- [7] Hipparcos-Katalogdienst: <http://astro.estec.esa.nl/Hipparcos/HIPcatalogueSearch.html>