Über gerade und gekrümmte Linien am Himmel - oder: *Warum zeigt die Mondsichel nicht genau zur Sonne?*

von Burkard Steinrücken, Universität Dortmund

Auch wenn es anders aussieht: Die Mondsichel zeigt immer exakt zur Sonne, ganz gleich welche Mondphase bzw. welchen Winkelabstand zur Sonne unser Mond aufweist. Da der Beobachter zusammen mit dem Mond und der Sonne in einer Ebene liegt, die das Zentrum der gedachten Himmelskugel schneidet, ist die kürzeste Verbindung von Sonne und Mond ein Großkreis, der auch in der Zentralprojektion nicht gekrümmt abgebildet wird, wie es bei anderen Koordinatenlinien wie Höhen- oder Deklinationskreisen der Fall ist.
Offensichtlich erfolgt die Bilderzeugung in Auge und Gehirn nicht nach den Gesetzmäßigkeiten der Zentralprojektion, wie sie in der Fotografie Anwendung findet, und die bei Weitwinkelaufnahmen stürzenden Vertikalkreise erscheinen aufrecht.

Einführung

In vielen einführenden Lehr- und Schulbüchern zur Astronomie findet man Zeichnungen, die die Situation einer Neulichtbeobachtung am abendlichen Westhorizont wiedergeben. Die junge Mondsichel, die erstmals nach Neumond wieder in der Abenddämmerung erscheint, zeigt auf die Position der soeben untergegangenen Sonne (siehe Abb. 1). Wer es selbst einmal in der Natur beobachtet, findet diesen Trick zur Bestimmung der Richtung zur Sonne gut bestätigt.

Die Neulichtbeobachtung gelingt jedoch nicht immer. Zu kurz ist die Zeit zwischen der erstmaligen Sichtbarkeit der Mondsichel bei dunkler werdendem Himmel und dem Untergang des Mondes. Außerdem ist die Beobachtung nur tief am Westhorizont möglich. In dicht besiedelten und bebauten Gegenden ist es aber oft sehr schwierig, einen unverstellten Horizont zur Beobachtung zu finden und aufzusuchen.

Einige Tage später, wenn die Mondsichel zugenommen hat und der Mond fast im ersten Viertel steht, ist die Beobachtung problemlos und sogar am Tag möglich, da der wachsende Mond nicht mehr von der Helligkeit des Himmelshintergrundes überstrahlt wird. Dann aber - O Schreck! - zeigt die Mondsichel nicht mehr auf die Sonne und alle Darstellungen nach Art der Abb. 1 finden keine Bestätigung in der Natur mehr. Nun wird die Situation oft durch Zeichnungen nach Art der Abb. 2 wiedergegeben, die durch „gefühlsmäßiges“ Zeichnen entstanden sind.

Was ist geschehen? Warum zeigt eine Mondsichel mit größerem Winkelabstand zur Sonne, als es beim Neulicht der Fall ist, nicht auf die Sonne, sondern über sie hinweg? Ist der Effekt real und somit durch die Konstellation der Gestirne im Raum und durch die Analyse der Himmelsgeometrie begründbar, oder stellt sich das Phänomen ein, weil uns die Sinneswahrnehmung einen Streich spielt, indem psychophysische Komponenten der Wahrnehmung die reale Himmelsgeometrie verfremden?
Diesen Fragen soll im Aufsatz nachgegangen werden.

Als adhoc-Begründung für das Vorbeizielen der Mondsichel wird manchmal angeführt, dass man sich an der scheinbaren Himmelskugel eben gekrümmte Koordinatenlinien vorstellen müsse und auch die Gestirne durch krumme Linien zu verbinden seien. Dies verschleiert die wahren Gründe für das Phänomen. Nicht alle Linien oder Gestirnsbahnen verlaufen gekrümmt, wie in diesem Aufsatz gezeigt wird.
Im Planetarium dagegen sehen fast alle Linien, die ans Kuppeldach projiziert werden - auch der Himmelsäquator, die Ekliptik und der Horizont - krumm aus, weil man am Rand des Gewölbes sitzt.

Gradnetze und Großkreise an der Himmelskugel

In einem ersten Schritt zur Klärung der Titelfrage sollen die Eigenschaften unseres Sinnesapparates zunächst ausgegrenzt werden. Die objektive Gestalt der Himmelsgeometrie spielt hier die Hauptrolle. Wie jedoch läßt sich der Himmel erfassen, ausmessen und abbilden?

Die Himmelskugel ist von Geodäten und Astronomen mit Gradnetzen überzogen worden, die die Festlegung eines jeden Punktes am Himmel durch die Angabe zweier Winkelkoordinaten ermöglichen. Der Abstand vom Beobachtungszentrum, die dritte Raumkoordinate, bleibt hier unberücksichtigt, da es für das Thema nicht auf die Entfernungen der Himmelskörper im Raum ankommt, sondern nur auf ihre relativen Winkelabstände bei der Projektion auf die Himmelskugel.

Gebräuchlich sind in der Astronomie drei Gradnetze, die dem System irdischer Längen- und Breitengrade gleichen, aber nach unterschiedlichen Fixpunkten bzw. Polen orientiert sind.
Das *Horizontalsystem* basiert auf dem Horizont als Großkreis und dem Zenit, dem senkrecht über dem Beobachter stehenden Punkt, als Pol (Abb. 3). Die zwei Winkelkoordinaten lauten Azimuth a und Höhe h. Punkte gleicher Höhe liegen auf einem Höhenkreis, Punkte gleicher Azimuthe auf einem Vertikalkreis.
Das *Äquatorialsystem* benutzt den Himmelsäquator als Großkreis und den Himmelspol als Fixpunkt, entspricht somit dem irdischen Gradnetz von Länge und Breite (Abb. 4). Die äquatorialen Koordinaten der Himmelskugel werden aber Deklination δ und Rektaszension α genannt. Punkte gleicher kürzster Winkelabstände zum Himmelsäquator (gleicher Deklinationen) liegen auf Deklinationskreisen, Punkte gleicher Rektaszensionen auf Stundenkreisen.
Das *Ekliptiksystem* verwendet die scheinbare jährliche Sonnenbahn über den Himmel, die Ekliptik, die auch die Marschroute für den Planetenlauf festlegt, als fundamentalen Großkreis. Die Koordinaten lauten ekliptische Breite β_E und Länge λ_E.

Großkreise begrenzen an der gedachten Himmelskugel eine kreisförmige Schnittebene, die den Betrachter im Zentrum enthält. Höhenkreise im Horizontalsystem bzw. Deklinationskreise im Äquatorsystem begrenzen zwar ebenfalls eine kreisförmige Schnittebene durch die Himmelskugel, sind aber keine Großkreise und ihre Schnittebenen erfassen das Zentrum, in dem der Beobachter steht, nicht.

Alle Richtungen, die auf die verschiedenen Punkte eines Großkreises deuten, können bei Drehung um eine einzige Achse, die senkrecht auf der Großkreisebene steht, durchlaufen werden, ohne das eine Verstellung der zweiten Achse aus der Nulllage erforderlich ist.
Ein einfaches Beispiel aus dem Alltagsleben ist das Erfassen des gesamten Horizontgroßkreises von einem Aussichtspunkt durch Drehen des Körpers um die Standachse. Die Neigung des Kopfes ist Null und kann beim Rundblick unverändert bleiben. Das geodätische Instrument, welches die gleichen Bewegungsachsen wie in diesem Beispiel aufweist und somit die Koordinaten Azimuth a und Höhe h des Horizontsystems mißt, heißt Theodolith. Es findet auch auf Baustellen zur Einmessung des Baugeländes Verwendung.

Aber auch Sonne und Mond liegen auf einem Großkreis, denn der Beobachter, sieht man von seinem Abstand zum Erdmittelpunkt ab, ist sowohl Bestandteil der Mondbahnebene als auch der Ebene, die durch den Umlauf der Erde um die Sonne gegeben ist (die Ekliptik). Die Abbildung 5 verdeutlich die Lage der Ekliptik in Relation zum Himmelsäquator. Es ist eine geozentrische Darstellung mit der Erde im Mittelpunkt der Himmelskugel. In der geozentrischen Sichtweise durchläuft die Sonne die Ekliptik in einem Jahr. Zur Winter- bzw.

Sommersonnenwende z.B. steht sie im Winter- bzw. Sommersonnenwendepunkt. Die Ekliptik ist gegen den Himmelsäquator um 23,44° geneigt.
Die Mondbahn ist mit 5,15° noch leicht gegen die Ekliptik geneigt, wie aus der Abbildung 6 hervorgeht. Ihre Schnittpunkte mit der Ekliptik heißen Knoten. Die die Knoten verbindende Linie geht durch das Zentrum der Erde.
Die gedachten Verbindungslinien vom Beobachter zum Mond und zur Sonne, sowie vom Mond zur Sonne, definieren mithin eine Ebene, die den Mittelpunkt der Himmelskugel beinhaltet und damit eine ist, welche durch Schnitt mit der Himmelskugel einen Großkreis erzeugt. Die Phasenfigur des Mondes ist symmetrisch zu dieser Großkreislinie, welche auf kürzestem Weg (im Sinne der sphärischen Astronomie) vom Mond zur Sonne führt. Die Lage dieses Großkreises muß für jede Mondphase und jede Beobachtungssituation am Himmel neu gefunden werden. In der späteren Rechnung werden wir für diesen Großkreis die Ekliptik ansetzen, denn die aus Mond, Sonne und Beobachter gebildet Ebene kann mit der Ekliptik zusammenfallen, und zwar dann, wenn der Mond in einem seiner Bahnknoten steht.
Die Mondsichel, welche in Richtung des Großkreisverlaufs deutet, zeigt somit immer genau zur Sonne. Wie kommt es dann aber zum Eindruck des Vorbeizielens?

Das Gradnetz der Himmelskugel in Zentralprojektion

Wie behalten unsere Absicht, die Sinneswahrnehmung auszugrenzen, weiter bei, und fragen uns, wie die Konstellation von Sonne und Mond auf einer Fotografie zu sehen wäre. Die Fotografie bildet alle Objektpunkte auf einem ebenen Filmstreifen ab, der bei einer Objektweite von unendlich (was bei Sonne und Mond im Sinne der Fototechnik hinreichend gut gegeben ist) im Brennpunkt des Objektivs steht. Wir könnten die Fotografie auch mit einer Lochkamera machen, die allerdings längere Belichtungszeiten benötigt. Bei der Lochkamera treten die geometrischen Aspekte der Bildprojektion aber deutlicher zutage (Abb. 7), und deshalb wird sie hier aus didaktischen Gründen eingesetzt.
Eine Fotografie ist eine Zentralprojektion der Außenwelt durch das Eintrittsloch auf die Filmebene. Entscheidend ist nun die Frage, wie sich das Horizontal-Gradnetz der Himmelskugel, welches durch einen Theodolithen mittels Schwenken um die Stand- und Kippachse abgerastert wird, bei feststehender Kamera auf den Film projiziert wird.

Die Abb. 8 verdeutlicht das zu lösende geometrische Problem. Allerdings wird die Projektion hier nicht auf einen Filmstreifen im Inneren der Kugel ausgeführt, sondern auf eine Tangentialebene, die an die Himmelskugel angelegt ist und zur optischen Achse, der „Blickrichtung“ des Fotoapparates, senkrecht steht. Das Kameraloch nimmt nun den Mittelpunkt der Himmelskugel ein. Das Ergebnis einer radial nach außen weisenden Projektionsrichtung an eine Tangentialebene ist das gleiche wie bei einer Abbildung auf die Rückwand der Kamera, wenn man nur bedenkt, daß die Fotografie ein umgedrehtes und seitenvertauschtes Bild ergibt (Abb. 9). Schon beim einfachen Fall der Abbildung 9 zeigt sich, dass die äquidistanten Markierungen auf einem Kreissegment in der Zentralprojektion ihre äquidistanten Abstände verlieren. Das wird um so deutlicher, je größer der fotografierte Winkelbereich ist. Weitwinkelobjektive rufen verzerrte und stürzende Linien hervor!

Für die Herleitung der Projektionsformeln ist der Koordinatensatz eines Punktes der Sphäre in Kugelkoordinaten mit den kartesischen Koordinaten auf der Projektionsfläche zu vergleichen. Ziel ist die Ermittlung der kartesischen Koordinaten λ (für die waagerechte Richtung) und μ (für die senkrechte Richtung) für Punkte auf der Sphäre mit bekannten Höhen- und Azimuthwerten. Als weitere Bestimmungsgröße bei der Transformation muß der Höhenwinkel h_0 der optischen Achse, bzw. der Bildmitte, bekannt sein, damit eine Orientierung der tangentialen Projektionsfläche im Raume möglich ist. Während alle Richtungsvektoren, die an die Sphäre deuten, Einheitsvektoren sind, schießen sie bei der Verlängerung auf die Projektionsfläche aus der Kugel hervor, und das um so mehr, je größer ihr Winkelabstand von jenem Vektor ist, der zum Bildmittelpunkt, d.h. in Richtung der optischen Achse weist (siehe auch Abb. 9).

Die Koordinaten des Horizontalsystems sind sphärische Polarkoordinaten, die sich in einem dreidimensionalen kartesischen *(xyz)*-Koordinatensystem folgendermaßen darstellen lassen:

$$x = r \cdot \cos h \cdot \cos a$$
$$y = r \cdot \cos h \cdot \sin a$$
$$z = r \cdot \sin h$$

Die Himmelskugel sei die Einheitskugel mit $r = 1$. Da eine Rotationssymmetrie um die z-Achse besteht, können wir zur Vereinfachung der weiteren Rechnung annehmen, die Zentralprojektion erfolge in Richtung der x-Achse mit $a_0 = 0$ und Höhe h_0 (Abb. 8).
Wird der Polarkoordinatenvektor über die Einheitskugel hinaus verlängert, so trifft er die Ebene in einem Punkt P, der auch durch die Basisvektoren der Projektionsebene dargestellt werden kann:

$$\vec{P} = \vec{P}_0 + \lambda \cdot \vec{e}_\lambda + \mu \cdot \vec{e}_\mu$$

$\vec{P}$ ist der Vektor, der vom Zentrum der Kugel bis an die Projektionsfläche zum Punkt P reicht, $\vec{P}_0$ ist der Einheitsvektor, der zum Bildmittelpunkt der Zentralprojektion deutet (die optische Achse der Lochkamera), und $\vec{e}_\lambda$ und $\vec{e}_\mu$ sind die Einheitsvektoren der Projektionsfläche, die innerhalb dieser Fläche waagerecht und senkrecht orientiert sind. Der Einheitsvektor $\vec{e}_\lambda$ ist identisch mit dem gegengerichteten Einheitsvektor $\vec{e}_y$ des dreidimensionalen kartesischen Systems, der Einheitsvektor $\vec{e}_\mu$ ist gegen den Vektor $\vec{e}_z$ um den Winkel h_0 aus der Vertikalen verkippt. Alle angesprochenen Vektoren lassen sich schnell in der oben angegeben Polardarstellung hinschreiben:

$$\vec{P} = \varepsilon \cdot \begin{pmatrix} \cos h \cdot \cos \Delta a \\ \cos h \cdot \sin \Delta a \\ \sin h \end{pmatrix}, \quad \vec{P}_0 = \begin{pmatrix} \cos h_0 \\ 0 \\ \sin h_0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\mu = \begin{pmatrix} -\sin h_0 \\ 0 \\ \cos h_0 \end{pmatrix}$$

Zu beachten ist, dass nun alle Azimuthwerte a auf den Azimuthwert a_0 des Bildmittelpunktes bezogen sind ($\Delta a = a_0 - a$). Der Vektor $\vec{P}$ hat nun die Länge ε, da er die Projektionsfläche außerhalb der Einheitskugel trifft.
Die Bestimmungsgleichungen für λ und μ bei gegebenen Werten von h und Δa gewinnt man aus dem Formelsystem, welches sich durch Gleichsetzen der Ausdrücke für $\vec{P}$ in Polarkoordinaten und in der Basisdarstellung für die Projektionsebene ergibt:

$$\vec{P} = \varepsilon \cdot \begin{pmatrix} \cos h \cdot \cos \Delta a \\ \cos h \cdot \sin \Delta a \\ \sin h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos h_0 \\ 0 \\ \sin h_0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -\sin h_0 \\ 0 \\ \cos h_0 \end{pmatrix}$$

In Komponentenschreibweise:

$$\begin{aligned} \varepsilon \cdot \cos h \cdot \cos \Delta a &= \cos h_0 - \mu \cdot \sin h_0 && i) \\ \varepsilon \cdot \cos h \cdot \sin \Delta a &= -\lambda && ii) \\ \varepsilon \cdot \sin h &= \sin h_0 + \mu \cdot \cos h_0 && iii) \end{aligned}$$

Der Betrag ε dieses Vektors berechnet sich zu:

$$\varepsilon = \sqrt{(\cos h_0 - \mu \cdot \sin h_0)^2 + \lambda^2 + (\sin h_0 + \mu \cdot \cos h_0)^2} = \sqrt{1 + \lambda^2 + \mu^2}$$

Löst man die drei Gleichungen für die drei Komponenten jeweils nach ε auf, so erhält man λ durch Gleichsetzen von *i)* und *ii)*, μ durch Gleichsetzen von *i)* und *iii)*:

$$\lambda = \tan \Delta a \cdot (\mu \cdot \sin h_0 - \cos h_0)$$
$$\mu = \frac{\sin h \cdot \cos h_0 - \cos h \cdot \cos \Delta a \cdot \sin h_0}{\sin h \cdot \sin h_0 + \cos h \cdot \cos \Delta a \cdot \cos h_0}$$

Mit bekanntem Höhenwinkel h_0 der optischen Achse läßt sich aus diesen Formeln das Gradnetz der Horizontalkoordinaten (h, Δa in Bezug auf das Azimuth des Bildmittelpunktes) in Zentralprojektion berechnen (zuerst μ, dann λ) und zeichnen. Das Gradnetz erscheint verzerrt, und zwar um so stärker, je höher am Himmel der Bildmittelpunkt, auf den die optische Achse deutet, liegt. Abbildung 10 zeigt dies für einen Höhenwinkel der optischen Achse von 15°. Dargestellt ist ein Raster mit der Schrittweite von 1° in Höhe und Azimuth. Der Horizont mit der Höhenkoordinaten Null und auch die Vertikalkreise von Gradnetzpunkten gleichen Azimuthes werden als gerade verlaufende Linien abgebildet, denn es handelt sich bei allen diesen Linien um Großkreise, nun aber in Zentralprojektion. Die Vertikalkreise erscheinen nun gestürzt, und zwar um so mehr, je weiter sie von der Bildmitte entfernt sind.
Wird die Kamera auf den Zenit ausgerichtet (h_0 = 90°), so ergeben sich für Punkte gleicher Höhenkoordinate Kreise um den Bildmittelpunkt (Abb. 11 und 12). Auch die Zentralprojektionen der Abbildungen 11 und 12 zeigen ein Raster mit der Schrittweite 1°. Je näher man dem Zenit kommt, desto mehr rücken die Punkte gleicher Höhe aneinander.

Bei Betrachtung der Abbildungen 10 bis 12 schleicht sich leicht die Vermutung ein, dass bei einem Eintrag von Sonne und Mond in das verzerrte Horizontalkoordinatennetz mit seinen gekrümmten Höhenkreisen und gegeneinander verdrehten Vertikalkreisen, die Richtung, in die die Mondsichel zeigt, die Sonne verfehlt.
Die Überlegungen des vorangegangenen Abschnitts lehren uns jedoch, dass Großkreise in Zentralprojektion immer zu geraden Linien führen, ganz gleich, wie der Großkreis in Relation zu den Koordinaten des vorgewählten Gradnetzes steht.

Dies soll nun an zwei Beispielen durchgerechnet und demonstriert werden; an den Großkreisen des Himmelsäquators und der Ekliptik. Die Horizontalkoordinaten Azimuth und Höhe lassen sich in die himmlischen Äquatorialkoordinaten Rektaszension α (entspricht der geografischen Länge auf der Erdkugel) und Deklination δ (entspricht der Breite) umrechnen, wenn die geographische Breite Φ des Beobachtungsortes bekannt ist. Denn diese bestimmt die Höhe des Himmelspols über dem Nordhorizont und das Ausmaß der Erhebung des Himmelsäquators über den Südhorizont von (90° - Φ) (Abb. 4). In diesem Artikel wurde stets eine nördliche geographische Breite von Φ = 51,62 Grad (Recklinghausen) verwendet. Das System der Umrechnungsformeln lautet (*a* ist das Südazimuth über West gezählt):

<u>Transformation der Äquatorial- in Horizontalkoordinaten</u>

$$\sin a \cdot \cos h = \sin t \cdot \cos \delta$$
$$\cos a \cdot \cos h = \cos t \cdot \cos \delta \cdot \sin \Phi - \sin \delta \cdot \cos \Phi$$
$$\sin h = \cos t \cdot \cos \delta \cdot \cos \Phi + \sin \delta \cdot \sin \Phi$$

Transformation der Horizontal- in Äquatorialkoordinaten

$$\sin t \cdot \cos\delta = \sin a \cdot \cos h$$

$$\cos t \cdot \cos\delta = \cos a \cdot \cos h \cdot \sin\Phi + \sin h \cdot \cos\Phi$$

$$\sin\delta = -\cos a \cdot \cos h \cdot \cos\Phi + \sin h \cdot \sin\Phi$$

Der im Formelsystem enthaltene Stundenwinkel *t*, der den Winkelabstand des Stundenkreises des Gestirns vom Stundenkreis des Zenits (dem Meridian) beschreibt, steht mit der oben eingeführten Rektaszension α eines Gestirns mit der Sternzeit Θ, die dem Astronomen den momentanen Stand des Himmelsgewölbes angibt, über die Formel $t = \Theta - \alpha$ in Beziehung.
Die Deklination des Himmelsäquators ist Null. Die Rektaszension überstreicht den gesamten Äquatorkreis, der in der Astronomie üblicherweise nicht von 0 - 360° gezählt wird, sondern im Zeitmaß von 0 - 24 *h*, denn die Drehung der Erde bewirkt einen vollen Umlauf des Himmelsäquators in einem Tag. Für die Rechnungen sind natürlich alle Stundenwinkel ins Winkelmaß zu überführen.
Für unser Thema sind diese Betrachtungen nicht näher von Belang, wer die kommenden Rechnungen aber nachholen will, wird unweigerlich darauf stoßen.

Die Äquatorialkoordinaten des Himmelsäquators werden zunächst mit dem ersten Formelsatz in Horizontalkoordinaten umgerechnet und diese mit den Formeln der Zentralprojektion in kartesische Koordinaten (λ, μ) verwandelt. Sodann kann der Eintrag in die Projektionsfläche erfolgen, in der bereits das verzerrte Raster der Horizontalkoordinaten zu finden ist (Abb. 13). Wie zu erwarten war, erscheint der Äquatorgroßkreis als gerade Linie.

Nun erfolgt die Rechnung für die Ekliptik, die die Äquatorebene in einem Winkel von ε = 23,44° schneidet. Die ekliptische Breite der Ekliptik ist Null (per Definition), ihre Länge durchläuft den Vollkreis von 0 - 360°. Die Zählung der ekliptischen Länge wie auch der Rektaszension beginnt bei jenem Schnittpunkt von Äquator und Ekliptik, bei dem die Ekliptik auf die Nordhemisphäre aufsteigt und sie läuft gegen die tägliche Drehung des Himmelsgewölbes (Abb. 5). Dieser Schnittpunkt heißt Frühlingspunkt, weil die Sonne dort bei Frühlingsanfang am 21. März zu finden ist. Die Sternzeit Θ ist der Stundenwinkel des Frühlingspunktes, also der Winkel zwischen dem Meridian und dem Stundenkreis der Rektaszension 0 *h*.
Die Umwandlung der Äquatorialkoordinaten der Ekliptik in kartesische Koordinaten erfolgt in der gleichen Weise wie zuvor beim Äquator, nachdem die Ekliptikkoordinaten ekliptische Länge λ und ekliptische Breite β, mit folgenden Formeln zunächst in die Äquatorialkoordinaten umgewandelt wurden:

Transformation der Äquatorial- in Ekliptikkoordinaten

$$\cos\beta \cdot \cos\lambda = \cos\delta \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\beta \cdot \sin\lambda = \cos\varepsilon \cdot \cos\delta \cdot \sin\alpha + \sin\varepsilon \cdot \sin\delta$$

$$\sin\beta = -\sin\varepsilon \cdot \cos\delta \cdot \sin\alpha + \cos\varepsilon \cdot \sin\delta$$

Transformation der Ekliptik- in Äquatorialkoordinaten

$$\cos\delta \cdot \cos\alpha = \cos\beta \cdot \cos\lambda$$

$$\cos\delta \cdot \sin\alpha = \cos\varepsilon \cdot \cos\beta \cdot \sin\lambda - \sin\varepsilon \cdot \sin\beta$$

$$\sin\delta = \sin\varepsilon \cdot \cos\beta \cdot \sin\lambda + \cos\varepsilon \cdot \sin\beta$$

Man wählt sich einen Koordinatensatz ekliptischer Längen (β ist immer Null) und benutzt den zweiten Formelsatz .

Die Abbildung 13 zeigt auch das Ergebnis der Ekliptik-Rechnung. Berechnet wurde eine „Fotografie“ in Richtung Süden bei einer Höhe der optischen Achse von 45°. Abgebildet ist der Augenblick, zu dem der Frühlingspunkt im Süden steht (Sternzeit $\Theta = 0$). Auch die Ekliptik erscheint in der Zentralprojektion als gerade Linie.

Die Ekliptiklinie ist eine mögliche kürzeste Verbindungslinie zwischen Sonne und Mond an der Sphäre, denn der Mond überstreicht bei seinem monatlichen Umlauf die Ekliptik zweimal, im aufsteigenden und im absteigenden Knoten seiner Bahn. Wir können deshalb für die Diskussion der Titelfrage ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Ekliptik verwenden.

Auch wenn durch die mathematische Überprüfung die Frage schon positiv entschieden ist, ob bei einer Weitwinkelfotografie die Mondsichel genau auf die Sonne zeigt, ist die Situation für den Fall der Beobachtung am Westhorizont ebenfalls noch berechnet worden und in Abb. 14 dargestellt. Die Sternzeit beträgt hier 5 *h*. Die optische Achse deutet auf den Himmelspunkt mit den Horizontalkoordinaten $a_0 = 65°$, $h_0 = 25°$.
Es zeigt sich: In Unabhängigkeit von der relativen Lage der Ekliptik und des Äquators zum Horizont werden Großkreise niemals durch die Zentralprojektion zu gekrümmten Linien.

Gekrümmte Linien am Himmel

Deklinationskreise, die sich - in Analogie zu den Höhenkreisen oberhalb und unterhalb des Horizontes - in nicht verschwindenden Winkelabständen parallel um den Himmelsäquator scharen, werden in der Zentralprojektion zu gekrümmten Linien (Hyperbeln, Kreisen, Ellipsen), wie die Technik der Sternstrichspuraufnahme eindrücklich beweist.
Eine auf den nächtlichen Sternenhimmel ausgerichtete Kamera, die den eingelegten Film über viele Minuten, wenn nicht Stunden belichtet (die maximal mögliche Belichtungszeit hängt von der Helligkeit des durch die Zivilisation lichtverschmutzten Nachthimmels ab; in der Großstadt wird man kaum mehr als 10 Minuten belichten können) nimmt Sterne auf, die, verursacht durch die Erddrehung, über den Film wandern und deshalb Segmente von Deklinationskreisen in Zentralprojektion erzeugen. Nur ein Stern, der auf dem Äquator steht, erzeugt immer eine gerade Spur auf dem Bild. Ein Stern negativer Deklination, der auf der himmlischen Südhemisphäre steht, erzeugt eine Strichspur, die von der gerade verlaufenden Äquatorlinie fortgekrümmt ist und sich dem Himmelssüdpol öffnet. Nördliche Sterne positiver Deklination verursachen dagegen Hyperbelspuren, die zum Himmelsnordpol göffnet sind.

Üblicherweise wird der Verlauf der Sonnenbahn an verschiedenen Tagen im Jahr nach Art der Abbildung 15 dargestellt. Das Bild ergibt sich, wenn man in das „Miniplanetarium“ der Abbildung 16 vom Nordpunkt hineinblickt. Aber wir müssen uns vorstellen, wir stünden im Zentrum der Himmelskugel!

Man ist schnell verwirrt, wenn man, gestärkt mit „gefühlsmäßigen“ Zeichnungen über den stets gleich gekrümmten Sonnenlauf in den verschiedenen Jahreszeiten auf Strichspuraufnahmen blickt, die mit Ausrichtung der Kamera auf die Äquatorregion im Süden erstellt wurden. Dann zeigt sich nämlich ein ganz anderes Bild, welches mit den oben angegebenen Formeln auch auf dem Computer erzeugt werden kann (Abb. 17). Die Bahn der Sommersonne mit $\delta > 0$ ist nach oben gekrümmt, die Bahn der Sonne zu den Tag-und-Nachtgleichen am 21. März und 23. September ist, wie bei Äquatorialsternen üblich, eine gerade Spur, die Wintersonne auf der Südhemisphäre mit $\delta < 0$ endlich bringt eine Spur zustande, wie man sie für alle Tage vermutet hatte, nämlich mit der Wölbung nach oben.

Der scheinbare Widerspruch dieser Darstellungsform mit der Tatsache, dass die Sonne im Süden immer ihren höchsten Stand erreicht, löst sich auf, wenn man ihre Position in Bezug

auf das verzerrte Gradnetz der Horizontalkoordinaten verfolgt. Nun hat alles wieder seine Ordnung, vormittags und nachmittags steht sie stets bei geringeren Höhen als zur Mittagszeit.
Die Abbildung 18 zeigt die Strichspuren mit den gleichen Deklinationswerten wie in Abbildung 17, nun jedoch bei einer Aufnahme in Richtung des westsüdwestlichen Horizontes. Die oben geschilderten Krümmungsverhältnisse bleiben unverändert.

Fazit: Die vom „Gefühl“ hervorgebrachte Auffassung über die Bahnen der Sterne und die Geometrie des Himmelsgewölbes steht in eklatantem Gegensatz zur untrüglichen mathematischen Realität der Zentralprojektion, die in der Fotografie ihre alltägliche Anwendung findet.

Die Projektion der Himmelskugel auf den Augenhintergrund

Offenbar bedient sich die Sinneswahrnehmung anderer Mittel, um sich ein Bild von der Gestalt und der Geometrie des Himmels zu machen. Bei einer Überblicksbetrachtung über den ganzen Himmel schwenken wir den Kopf, so dass wir aus den in verschiedenen Blickrichtungen gewonnenen Raumeindrücken ein Gesamtbild konstruieren, das sich von dem der Kamera deutlich unterscheidet.
Eine Abhandlung der Gesamtheit der komplexen physiologischen Vorgänge bei der Sinneswahrnehmung liegt jenseits der Absichten dieses Artikels. Im folgenden wird noch gezeigt, dass sich bei einer zur Zentralprojektion unterschiedlichen Auftragung der Horizontalkoordinaten leicht der Eindruck gekrümmter Großkreissegmente erzeugen läßt.

Die Zentralprojektion der Außenwelt auf die Netzhaut mag nur als Grenzfall kleiner Himmelsausschnitte gelten, in denen die Verzerrungen des Koordinatenrasters noch zu keinen deutlichen Ausmaßen führen. Bei größeren Winkelspannen macht die Wölbung des Augenhintergrundes die einfachen Verhältnisse der Zentralprojektion zunichte.
Bei einer sphärischen Netzhaut (auch dies ist eine Idealisierung) werden die Koordinaten der Himmelskugel unverzerrt auf den Augenhintergrund übertragen. Gleiche Winkeldistanzen auf einem Vertikalkreis führen damit auch zu gleichen Winkeldistanzen und gleichen Bogenstücken auf der sphärischen Netzhaut. Entscheidend bei der Verarbeitung der Signale ist, wie das Gehirn die Sinneseindrücke der gewölbten Netzhaut in Bilder umsetzt. Bei einer angenommenen Abbildung der winkeltreuen Verhältnisse auf der Netzhaut in eine gedachte ebene und rechtwinklige Matrix gleicher Gradteilungsabstände stellen sich auch für Großkreissegmente gekrümmte Linien ein, die den Eindruck des Vorbeizielens der Mondsichel vortäuschen können (Abb. 19). Die Abbildung zeigt die Koordinaten der Abbildung 14 in einer Auftragung als „Gradabteilungskarte“. Alle Vertikalkreise erscheinen nun innerhalb dieser Matrix als aufrechte Linien, die senkrecht auf allen Höhenlinien stehen.

Der Mond vergrößert in 29,53 Tagen seinen Winkelabstand zur Sonne um 360°. Wenn die Neulichtbeobachtung bereits einen Tag nach Neumond gelingt, hat er einen Winkelabstand von ca. 12° (360°/29,53) zur Sonne. Am zweiten Tag nach Neumond beträgt er schon rund 24°, bei Halbmond sind es 90°. Der Effekt des Vorbeizielens fällt um so dramatischer aus, je größer der Winkelabstand von Sonne und Mond ist. Die Abbildung 19 gibt damit die tatsächliche Beobachtungssituation gut wieder. Gezeichnet sind Mondsicheln und ihre „Zeigerichtungen“ in aufeinanderfolgenden Tagen nach Neulicht. Zur besseren Sichtbarkeit sind die Sonnen- und Mondscheiben etwa um den Faktor 4 vergrößert dargestellt.

Der Effekt fällt auch um so deutlicher aus, je steiler die Ekliptik am Horizont aufragt. Abbildung 19 zeigt Beobachtungssituationen am Westhorizont mit der Sonne im Frühlingspunkt. Bei einer Mondsichelbeobachtung am Frühlingsabend steht der Mond um vieles höher am Himmel, als bei einer ähnlichen Beobachtungssituation im Herbst (Abb. 20), wenn die Ekliptik fast parallel zum Horizont verläuft. Ein Wahrnehmungsapparat, der auf die im Alltagsleben bedeutsame Horizontalrichtung ausgerichtet ist und intern Gradabteilungskarten nach Art der Abbildungen 19 und 20 erstellt, wird den Eindruck hervorbringen, dass die Mondsichel an Frühlingsabenden die Sonne weiter verfehlt als eine am herbstlichen Abendhimmel.

Das Gesichtsfeld beider Augen umfaßt in horizontaler Richtung etwa 180° [1]. Bedenkt man, dass zur Bestimmung der Phase und Richtung, in die die Sichel zeigt, der Mond mit dem Gelben Fleck der größten Sehschärfe anvisiert wird (Winkelgröße ca. 1 - 2°), der etwa auf der Mitte der Netzhaut liegt, so reduziert sich der nutzbare Bereich auf ca. 90°, und man kann die Sonnen- und Mondposition nur innerhalb des ersten Viertes gleichzeitig erfassen. Gleichwohl wird man bei der Beobachtung den Kopf schwenken und so ausrichten, dass die gedachte Verbindungslinie von Mond und Sonne mit der ansonsten üblichen Horizontalrichtung zusammenfällt. Nun aber kommen die Bogengänge als Sinnesorgane der Lagebestimmung ins Spiel. Die Auswirkungen einer Kopfneigung auf die Einschätzung der Horizontal- und Vertikalrichtung wird ebenfalls in [1, Seite 90 ff] beschrieben. Beide Richtungen werden bei geschwenktem Kopf nicht mehr richtig eingeschätzt (*Aubert-Phänomen*).
Der Gesichtssinn, der darauf eingestellt ist, Vertikalkreise als senkrechte, nicht stürzende Linien auf die Horizontale aufzureihen, wird durch ein Kopfneigen, welches das Erspüren der Horizontalen erschwert, zusätzlich verwirrt.

Ergebnis

Die Berechnungen in diesem Aufsatz haben gezeigt: Die projektive Geometrie kann nicht als Ausrede für das Vorbeizielen der Mondsichel herhalten, wenn das Auge nicht mit in die Betrachtung einbezogen wird.
Nicht die vermeintlich oder tatsächlich gekrümmten Linien am Himmelsgewölbe bewirken das Phänomen, sondern die Eigenschaften unserer Sinneswahrnehmung.

Literatur:
[1] Christoph von Campenhausen: Die Sinne des Menschen - Einführung in die Psychophysik der Wahrnehmung; 2. Aufl., Georg Thieme Verlag, Stuttgart New York 1993

Die neue Mondsichel zeigt zur Sonne

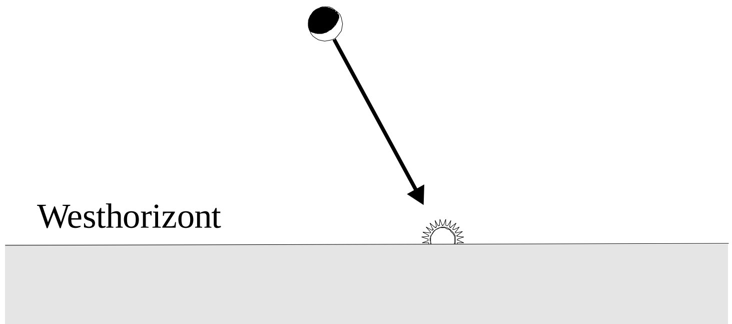


Abbildung 1

Der Halbmond zeigt über die Sonne

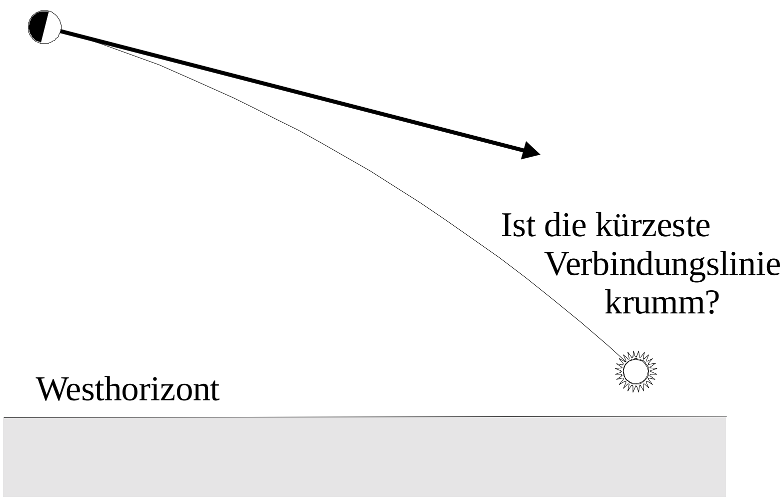
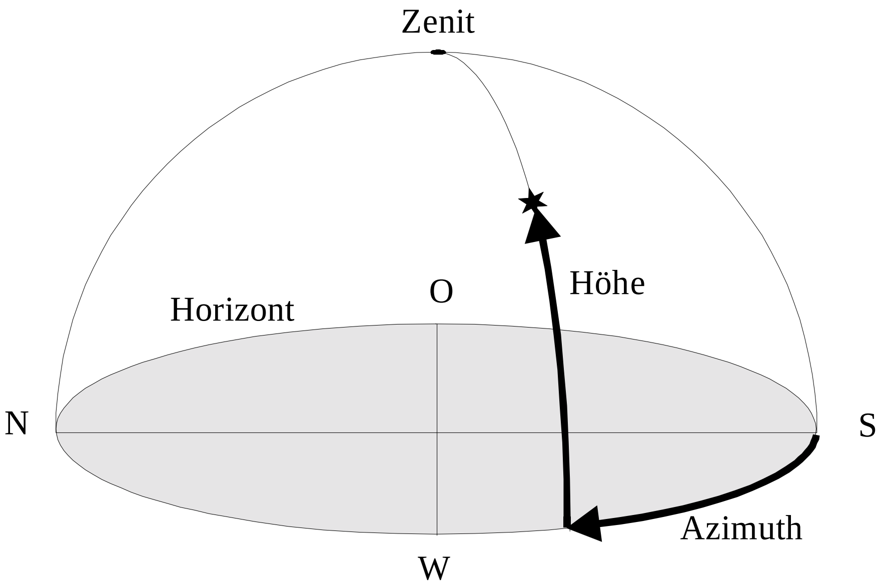
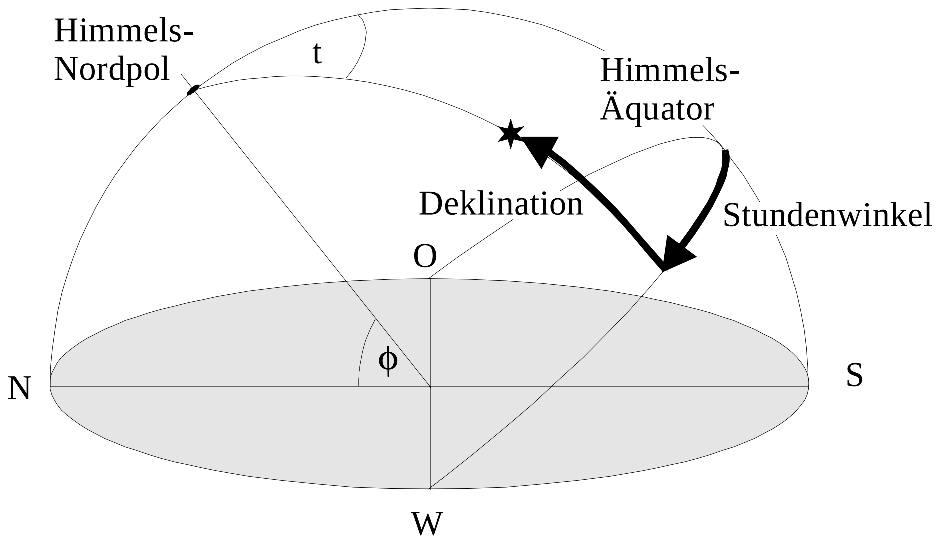


Abbildung 2



Koordinaten im Horizontsystem: Azimuth und Höhe

Abbildung 3



Koordinaten im Horizontsystem: Stundenwinkel und Deklination

Abbildung 4

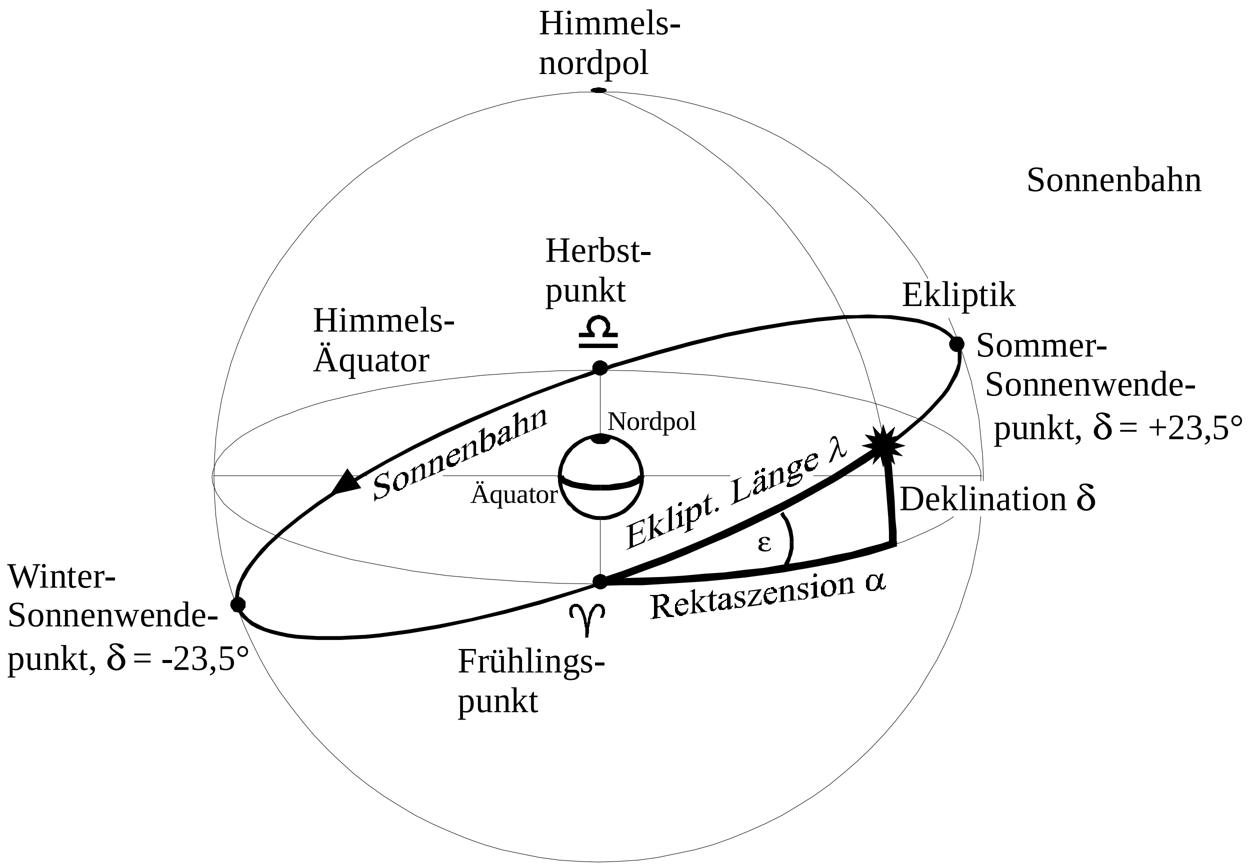


Abbildung 5: Die relative Lage von Himmelsäquator und Ekliptik im Raum

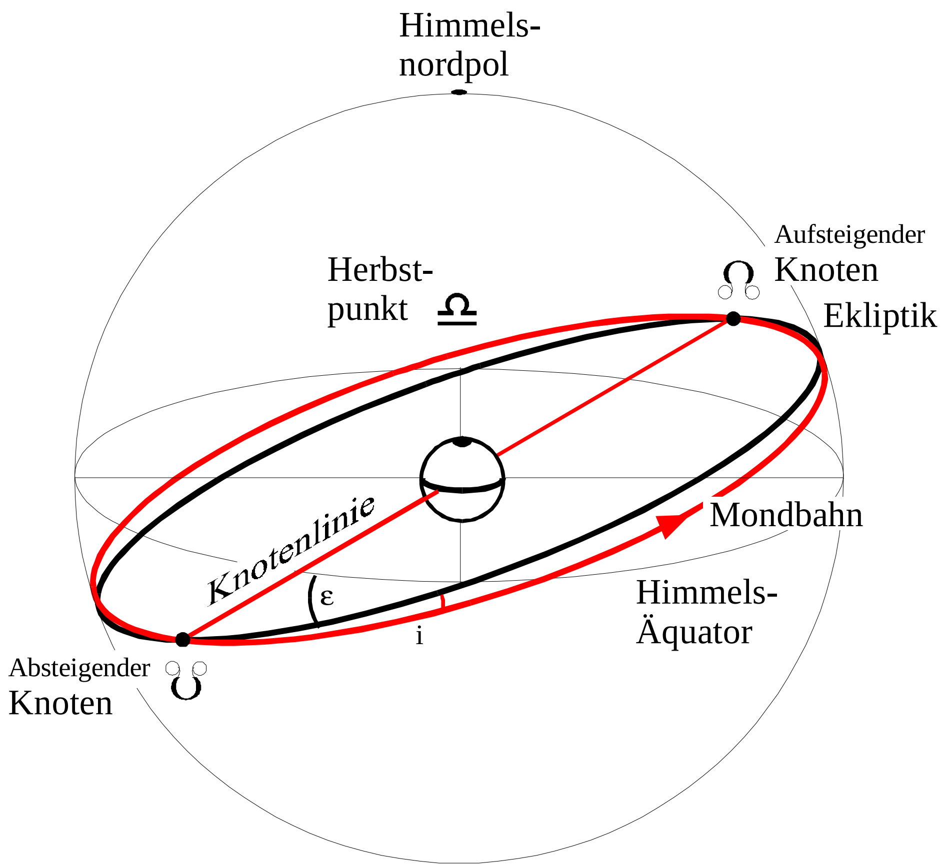
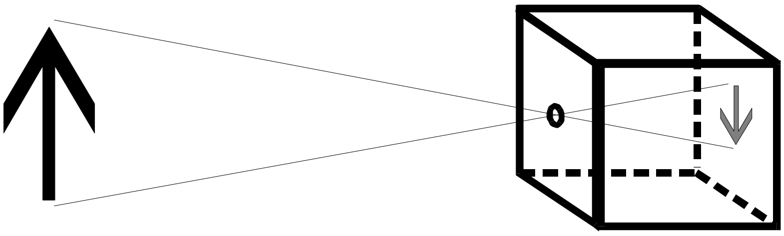


Abbildung 6: Die Lage der Mondbahn und der Knotenlinie im Raum

Bildentstehung in der Kamera



Bildentstehung im Auge

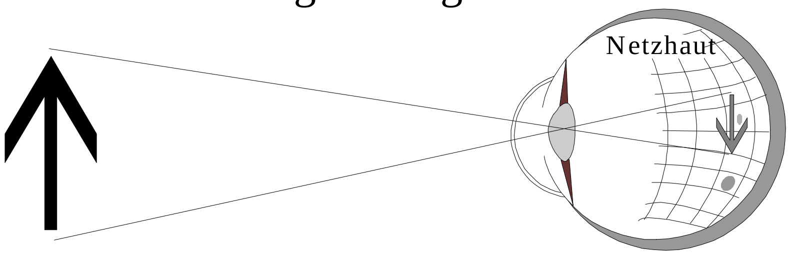
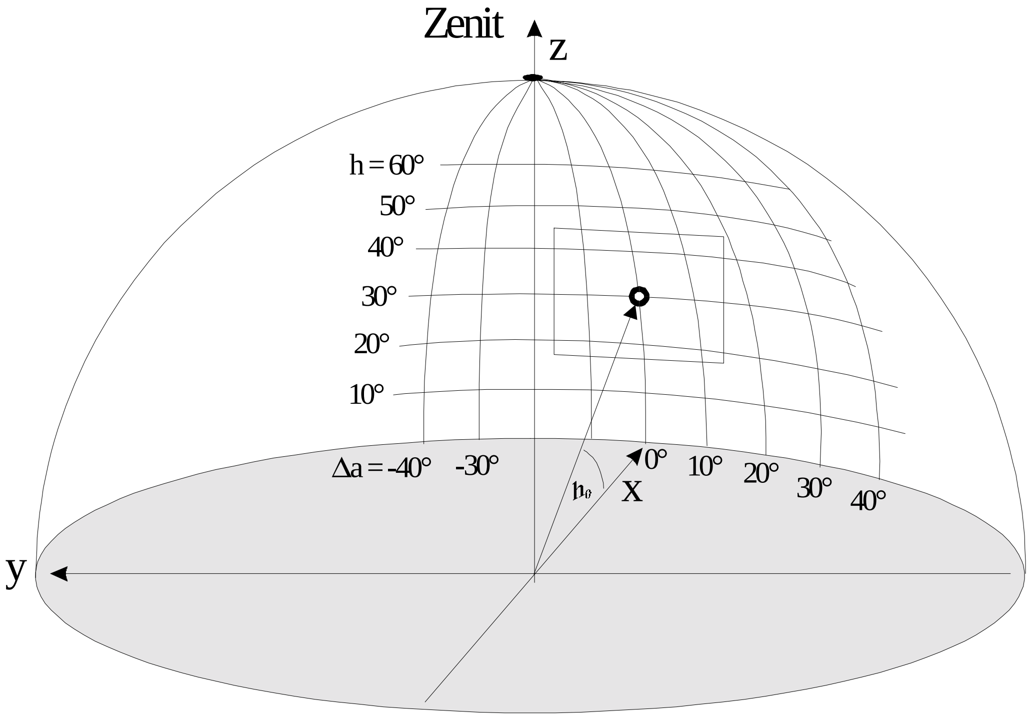


Abbildung 7

Zentralprojektion der Horizontalkoordinaten



Kartesische Koordinaten der Projektionsfläche

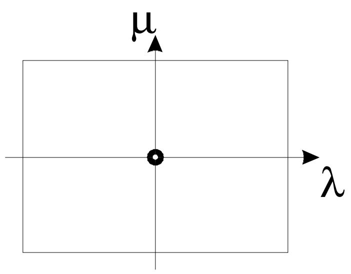


Abbildung 8

Zentralprojektion eines Kreissegments
mit äquidistanten Markierungen

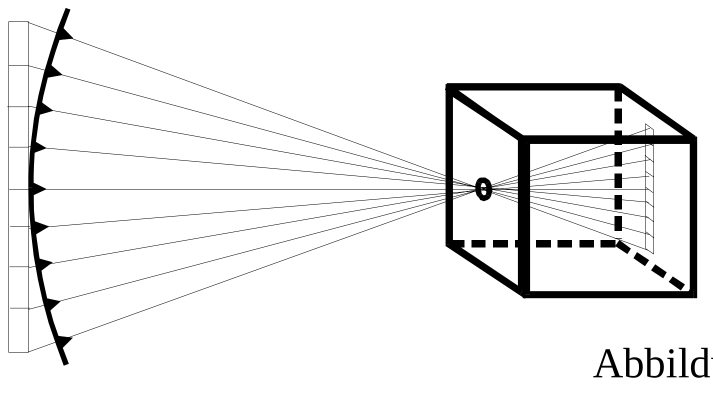


Abbildung 9

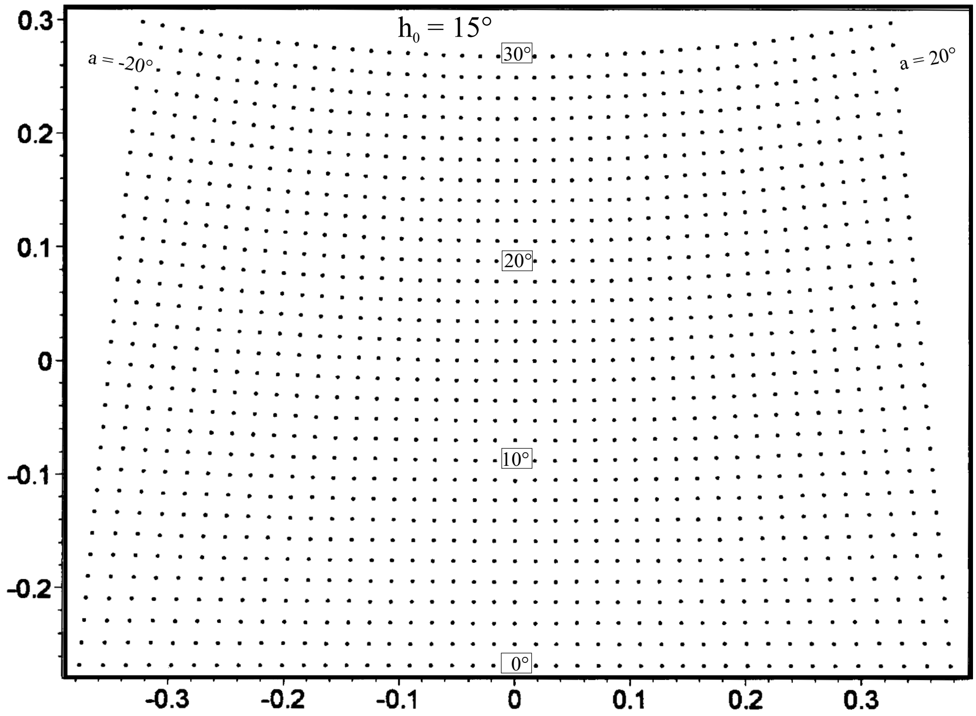


Abbildung 10

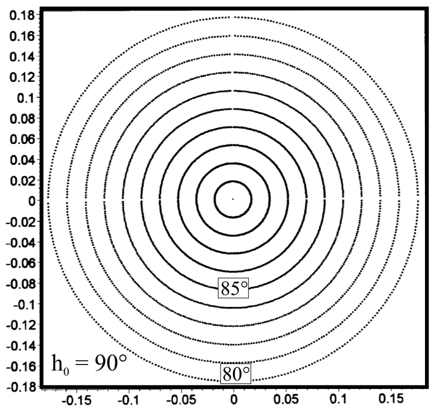
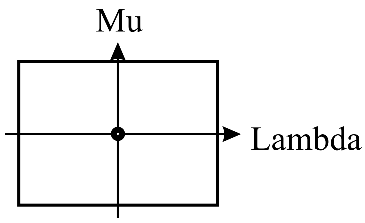


Abbildung 11



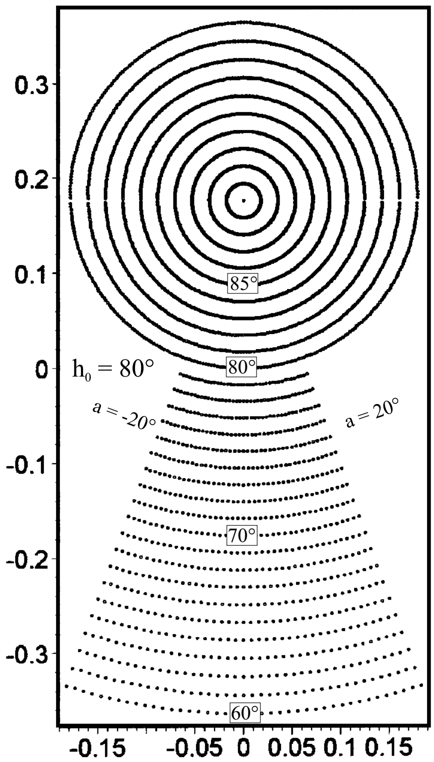


Abbildung 12

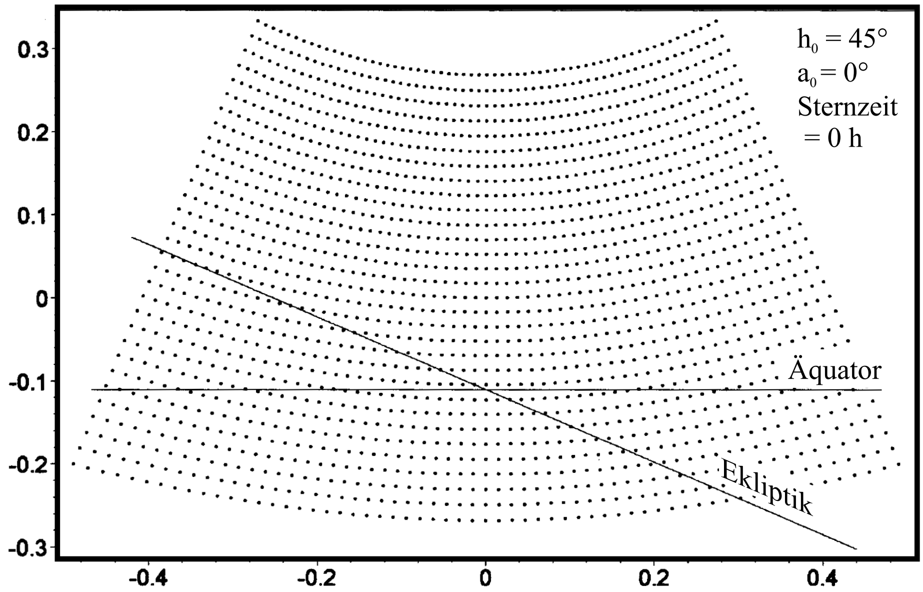


Abbildung 13

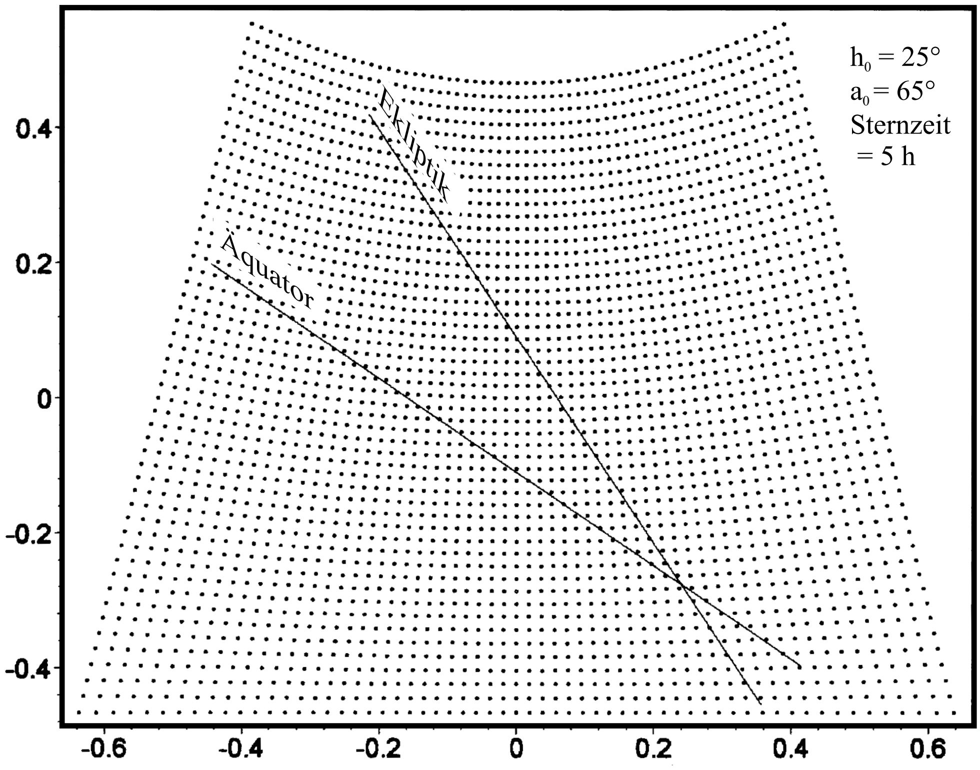


Abbildung 14

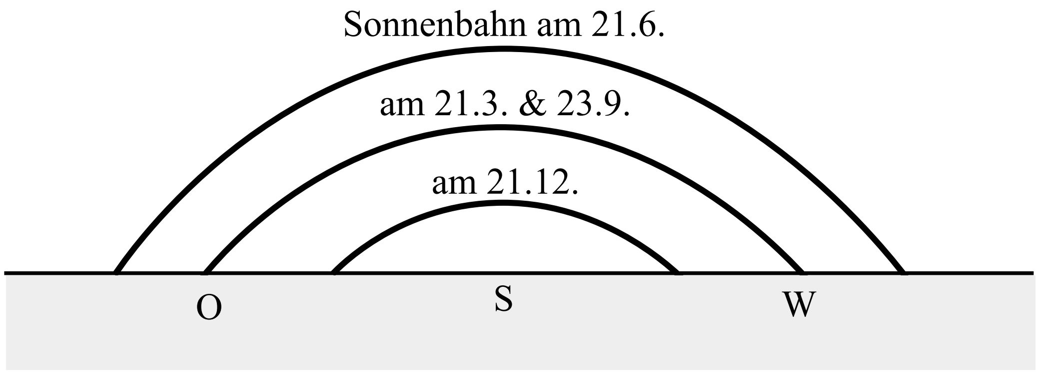


Abbildung 15

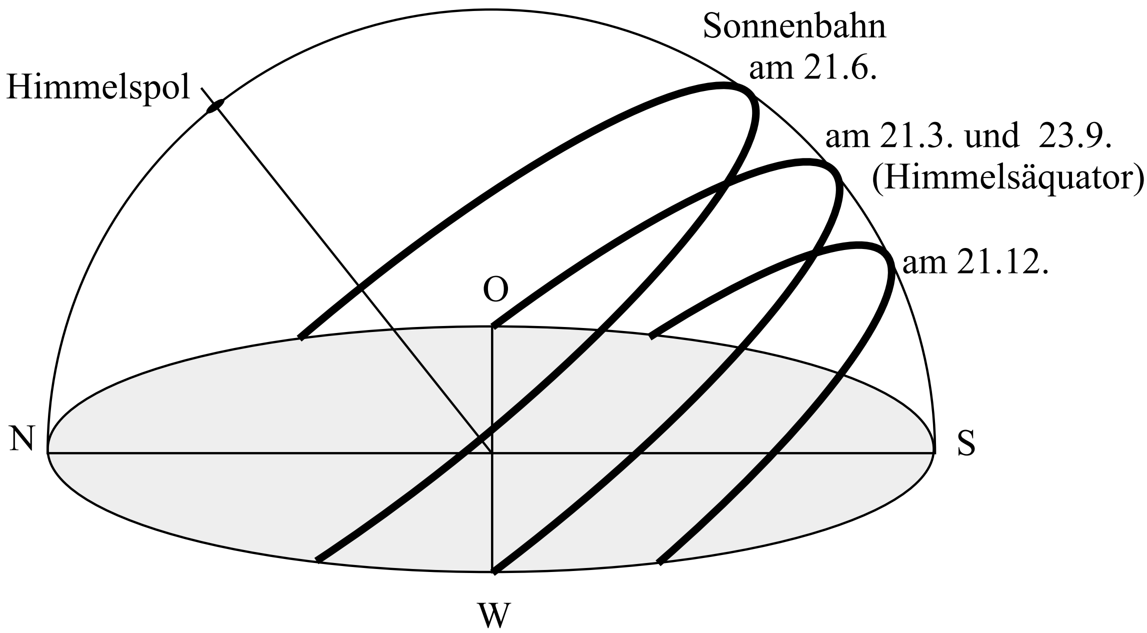


Abbildung 16

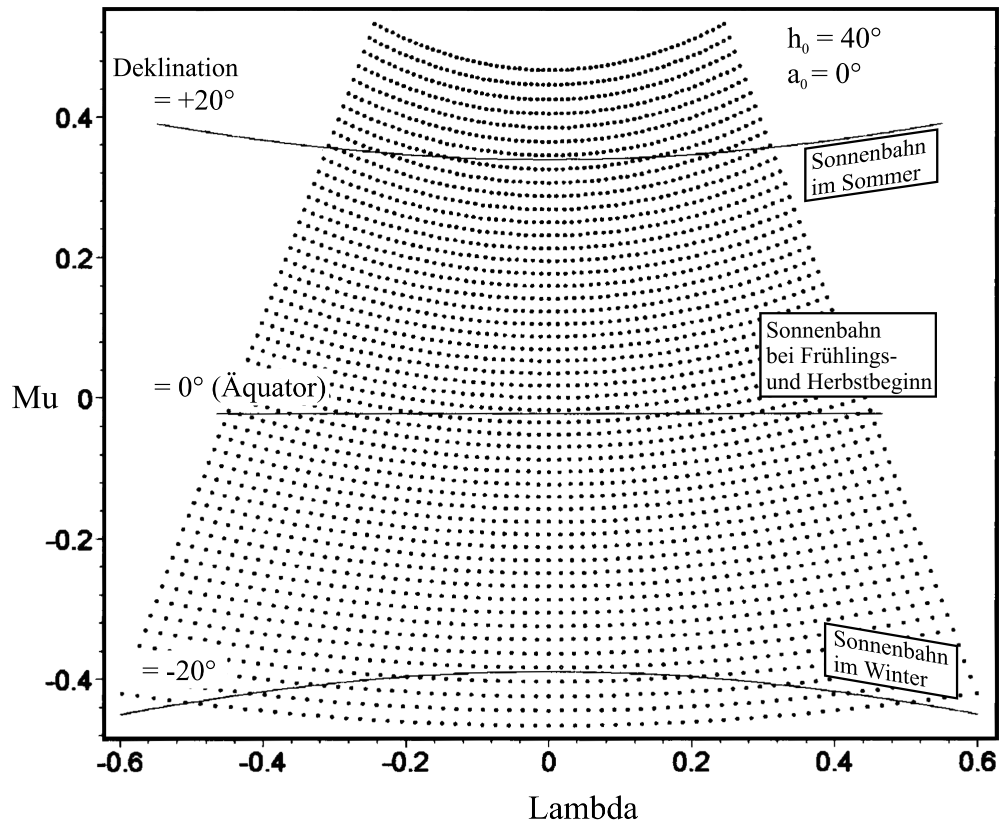


Abbildung 17

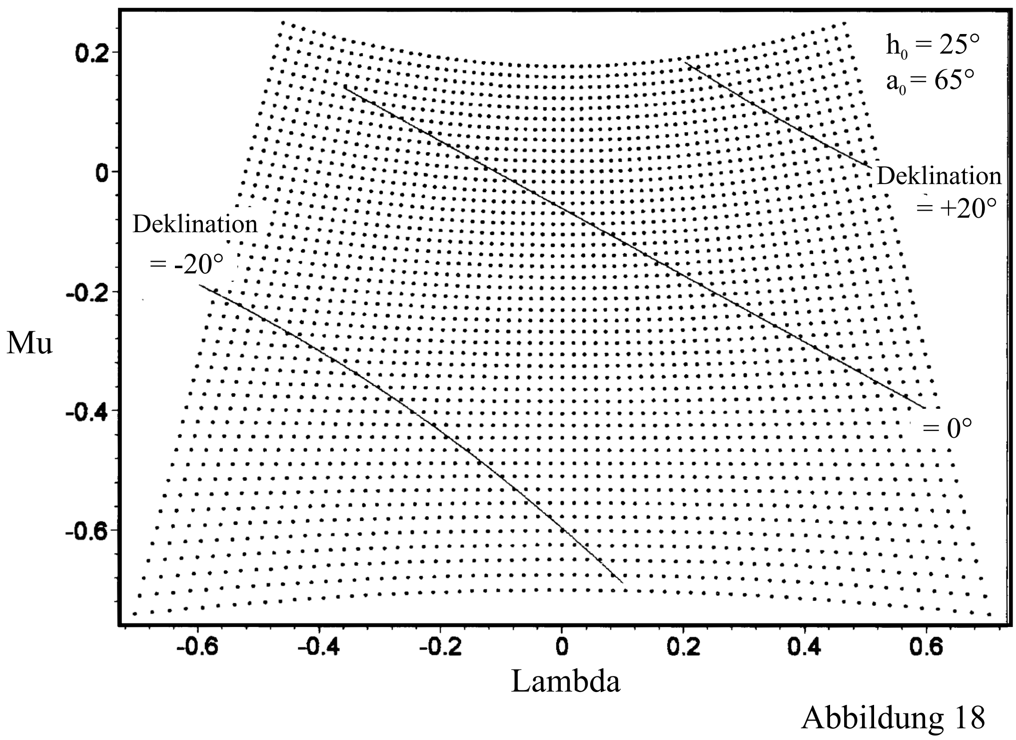


Abbildung 18

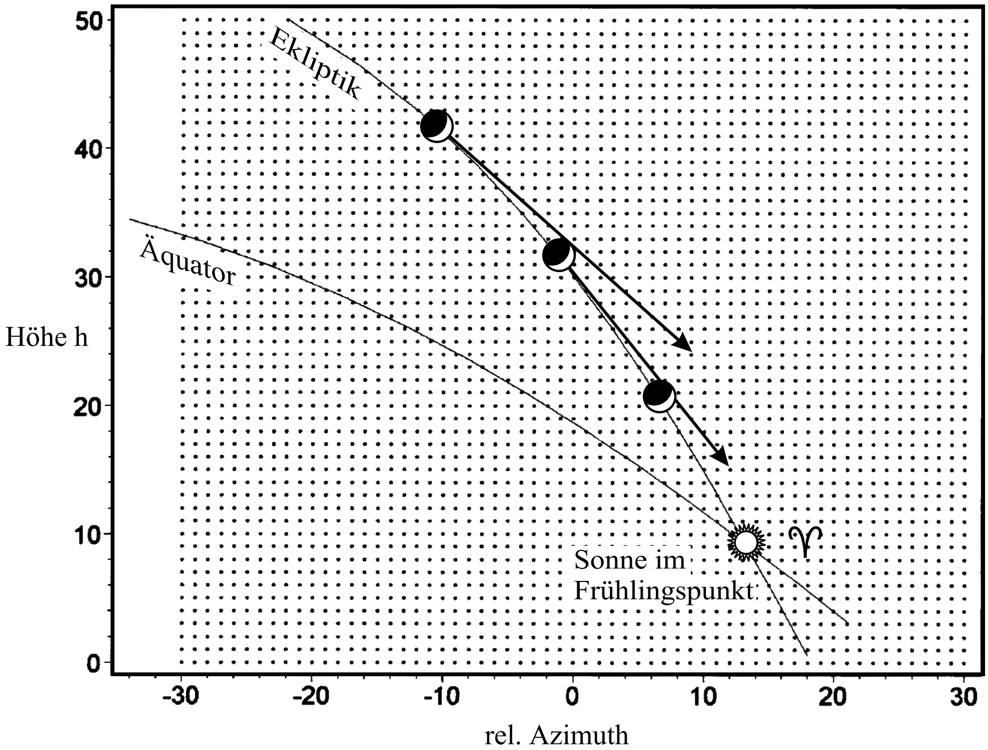


Abbildung 19

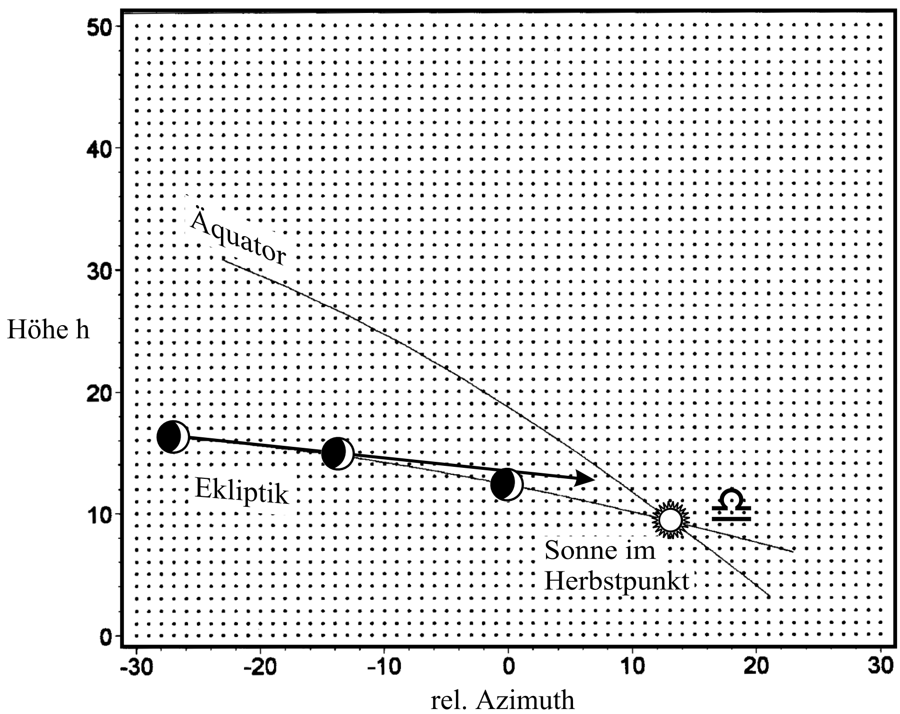


Abbildung 20