

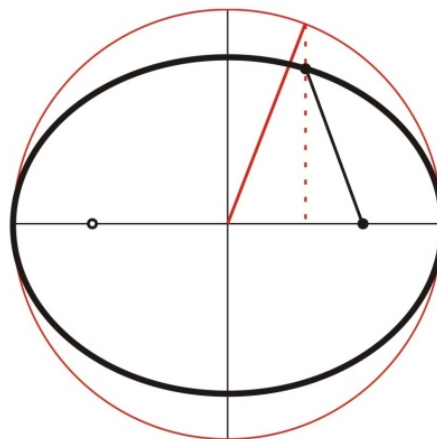
Keplerellipsen und der freie Fall

Einige Betrachtungen zur Fallbewegung

Burkard Steinrücken
steinruecken@sternwarte-recklinghausen.de

Westfälische Volkssternwarte & Planetarium
Stadtgarten 6, 45657 Recklinghausen

November 2007



Im Unterricht wird die Fall- und Wurfbewegung zumeist mit den Begriffen der Newtonschen Physik behandelt: Die Schwerkraft wirkt in Richtung des Massenmittelpunkts (z.B. der Erde oder der Sonne) und die Bahn eines frei fallenden Körpers ergibt sich durch Zerlegung der Bewegung in zwei räumliche Komponenten - beschleunigt in Richtung der Kraft und in senkrechter Richtung dazu allein trägheitsbewegt -, nach deren getrennter Analyse und Zusammenführung der Teilergebnisse man die zeitliche Dynamik des Körpers auf seiner Bahn endlich erhält. Bei der Behandlung der Planetenbewegung tauchen dann noch Begriffe wie Zentripetal- und Zentrifugalkraft auf, und es wird oft ein vermeintliches Kräftegleichgewicht zur Erklärung der Stabilität einer Bahn konstruiert, all dieses aber nur für den Sonderfall der Kreisbahn.

Nirgends taucht in dieser üblichen Behandlungsweise die Keplerellipse bzw. die Theorie der Keplerbewegung auf, die doch so sehr durch ihre Eleganz und Schönheit besticht und viel besser als Newtons Physik geeignet ist, das Wesen des Falls himmlischer und irdischer Körper schon qualitativ und auch ohne Rückgriff auf höhere Mathematik ganz einsichtig zu beschreiben. Das Kalkül der Newtonschen Theorie leistet das so nicht, und in der Unterrichtspraxis wird die in der Antike gemachte Trennung zwischen den irdischen und himmlischen Bewegungsformen, die durch Newton doch eigentlich aufgelöst wurde, praktisch wieder eingeführt.

1) Einleitung

Schlägt man Physiklehrbücher auf und sucht darin nach der Erklärung für die Bahnbewegung der Planeten um die Sonne, so findet man nicht selten Aussagen dieser oder ähnlicher Art:

Der Planet wird von der Schwerkraft der Sonne angezogen; wegen seiner Bahnbewegung und der daraus resultierenden Zentrifugalkraft fällt er aber nicht in die Sonne hinein. Der Abstand des Planeten zur Sonne und die Bahngeschwindigkeit des Planeten sind gerade so beschaffen, dass sich die Schwerkraft und die Zentrifugalkraft aufheben; es gibt ein Kräftegleichgewicht und der Planet stürzt nicht ab.

Eine solche Aussage über ein vermeintliches Kräftegleichgewicht zwischen Schwerkraft und Zentrifugalkraft ohne explizite Benennung des Bezugssystems des Beobachters ist leider falsch. Sie kann nur unter ganz eingeschränkten Bedingungen Gültigkeit beanspruchen, wie unten dargelegt wird. Von diesen Einschränkungen ist aber bei solchen Erklärungsversuchen zumeist nicht die Rede, und man muss sich geradezu wundern, wie so etwas überhaupt Eingang in ein Physiklehrbuch und in den Physikunterricht finden kann und dabei geradezu den Status einer Merkregel erlangt hat. Vermutlich ist es sogar eines der hartnäckigsten Misskonzepte in der Physik- und Astronomiedidaktik und der Autor kann aus seiner langjährigen Erfahrung bei der Organisation eines öffentlichen Vortragsbetriebs einer Volkssternwarte zahlreiche Beispiele beisteuern, wo selbst gestandene Professoren dem interessierten Publikum diese "Erklärung" vortragen, ohne dabei im Geringsten von des Zweifels Blässe angekränkt zu sein.

Offensichtlich ist es sehr schwer, die Planetenbewegung im Newtonschen Sinne zu erklären und ganz sicher verführen gar nicht trivialen Begriffe der Newtonschen Physik zu

Missverständnissen und zu einem Durcheinander. Man fragt sich fast angesichts der Notwendigkeit des propagierten Kräftegleichgewichts, wie die Natur bzw. der Planet dies so genau hinbekommt. Man möge sich nur in die Lage des armen Planeten hineindenken, der seinen Abstand bzw. seine Geschwindigkeit ständig so einregeln muss, dass er nicht in die Sonne stürzt und das auf des Messers Schneide stehende vermeintliche Gleichgewicht erfüllt. Woher weiß er denn, wie schnell er bei gegebenem Abstand sein muss, damit er für die stationäre Bahn genug Fliehkraft erzeugt? Und wie verhält es sich dann erst bei einer Ellipsenbahn, die ja doch der Normalfall ist? - Das ist dann natürlich viel zu schwer zu verstehen, weil die ganzen Kräftepfeile, die zu addieren sind, noch gegeneinander verdreht sind und die Geschwindigkeit und der Abstand des Planeten von der Sonne variieren. Deshalb beschränkt man sich lieber auf kreisrunde Planetenbahnen, die aber praktisch nicht vorkommen.

Falsch ist diese Erklärung, weil sie den Begriff der Zentrifugalkraft, ohne Nennung des rotierenden Bezugssystems des Beobachters, wo sie allein Sinn macht, allgemein und gleichrangig zur Schwerkraft verwendet. Der Beobachter rotiert aber nicht, sein Standpunkt, so wird es in den oft beigefügten Skizzen implizit vermittelt (siehe Abbildung 1), ist der eines inertialen Beobachters außerhalb des Planetensystems.

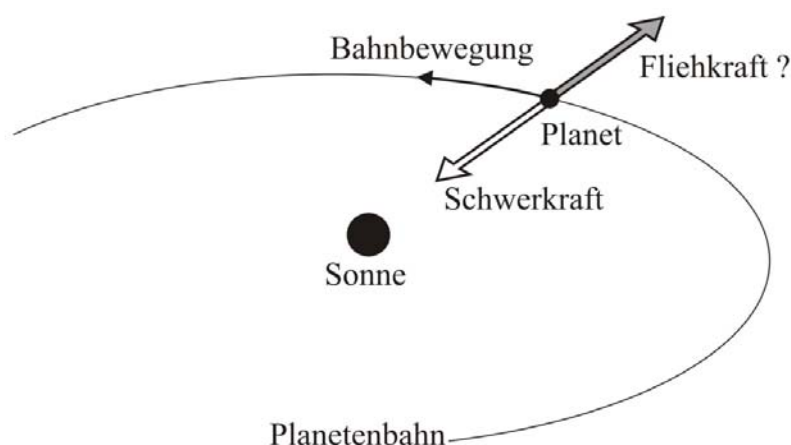


Abbildung 1: Zeichnungen dieser Art suggerieren, der Planet bleibe wegen eines Kräftegleichgewichts zwischen Fliehkraft und Schwerkraft auf seiner Bahn. Der Begriff der Fliehkraft ist allerdings mit besonderer Vorsicht zu behandeln. Es ist eine Scheinkraft, die allein ein Beobachter in einem mitrotierenden Bezugssystem beobachtet. Tatsächlich fällt der Planet unter dem Einfluss der Schwerkraft und wird dabei ständig beschleunigt.

Falsch ist die Erklärung, weil sie für diesen implizit eingeführten inertialen und außenstehenden Beobachter ein Gleichgewicht sich aufhebender Kräfte auf den Planeten behauptet, welches dann doch zu einer reinen Trägheitsbewegung, also geradeaus entlang der momentanen Geschwindigkeitsrichtung, führen müsste. Tatsächlich aber ist die Bahn gekrümmt, damit beschleunigt und nicht trägheitsbewegt, und folglich muss es eine resultierende Kraft geben, die diese Richtungsänderung der Geschwindigkeit hervorruft. Diese Kraft, auf deren Existenz man allein aus der Geschwindigkeitsänderung auf der Kreisbahn schließen kann, wird "Zentripetalkraft" genannt, also eine "zum Zentrum des Kreises hinziehende Kraft". In dem speziellen Fall der Wechselwirkung zwischen Sonne und Planet kann diese Zentripetalkraft mit der Schwerkraft identifiziert werden. Der Planet ist also nicht kräftefrei, wie die Erklärung behauptet, sondern bewegt sich unter dem Einfluss der Schwerkraft. Er fällt, und die ursprüngliche Geschwindigkeit, mit der er bei einem hypothetischen Anfangszustand in das Schwerfeld hineingeworfen worden sein mag, wird nun beständig durch die Kraftwirkung verändert.

Begibt man sich nun wieder auf die Erde und betrachtet den Fall von z.B. geworfenen Bällen, kommt niemand auf die Idee, Begriffe wie Zentripetal- oder Zentrifugalkraft, oder ein

vermeintliches Kräftegleichgewicht der Schwerkraft mit der Zentrifugalkraft, auch auf diesen Fall anzuwenden, obwohl er doch wesensgleich zur Planetenbewegung ist. Der Ball wird dann ganz selbstverständlich durch die Schwerkraft nach unten gezogen und in dieser Richtung beschleunigt und alles erscheint ganz unkompliziert und natürlich. Der Ball muss sich auch keine Gedanken machen, wie er seine Bahn durch genaue Abstimmung von Ort und Geschwindigkeit halten kann, wie es die "Erklärung" der Planetenbahn, überspitzt animistisch ausgedeutet, für den Planeten nahelegt. Er erleidet den Fall, der ihm von außen aufgeprägt wird, ganz zwanglos und nichts und niemand tariert Kräfte aus.

Durch diese völlig unterschiedliche Behandlungsweise wird ganz im antiken Sinne eine nun didaktisch motivierte Trennung zwischen der irdischen Fallbewegung und der ewigen Bahn der Himmelskörper eingeführt. Weder wird versucht, den irdischen Fall mit der "Erklärung" der Planetenbewegung zu verstehen, noch wird die Planetenbewegung analog zum Wurf eines Balles behandelt (falls man mit der oben genannten "Erklärung" seinen Frieden gemacht hat und diese tradiert).

Und das ist das eigentliche Problem dabei. Die Schülerinnen und Schüler können dann womöglich irdische Wurfparabeln und kreisförmige Planetenbahnen mit den Formeln der Newtonschen Physik berechnen, aber von geschlossenen elliptischen Fallkurven, zu denen auch die Wurfparabel als kleiner Ausschnitt einer insgesamt geschlossenen Bahn dazugehört, wissen sie nichts, und die Idee der Universalität des Falls im Himmel und auf Erden, eine Erkenntnis Newtons, die die Tradition der Vereinheitlichung von augenscheinlich ganz unterschiedlichen Phänomenen durch physikalische Theorien begründete, bleibt unvertieft.

Newton selbst hat mit einem berühmten Diagramm aufgezeigt, wie man diese Wesensgleichheit anschaulich macht (Abb. 2). Mit Bahnkurven von unterschiedlich schnell von einem hohen Berg waagrecht abgeworfenen Steinen lässt sich die geschlossene Bahn eines Erdumlaufs ("Orbit") an irdische Fallkurven anknüpfen. Der Mondumlauf und der Fall auf der Erde lassen sich damit auf die gleiche Ursache zurückführen, nämlich die Schwerkraft zwischen Erde und fallendem Körper.

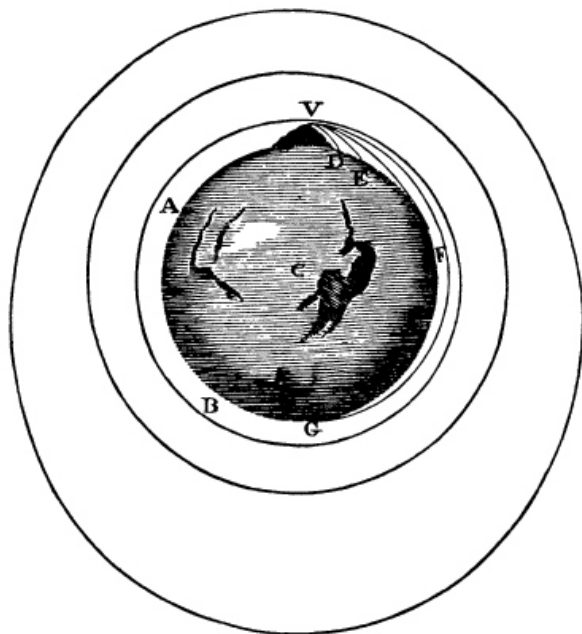


Abbildung 2: Newtons Diagramm zur Veranschaulichung der Wesensgleichheit der Mondbahn mit den Bahnen von Steinen, die von einem hohen Berg in waagerechter Richtung abgeworfen werden. Je schneller der Abwurf erfolgt, desto weiter fliegt ein Stein, bevor er die Erde in den Punkten D, E, F oder G trifft. Die Punkte B und A kann man mit einem waagerechten Wurf nicht erreichen. Erfolgt der Wurf mit einer Geschwindigkeit oberhalb einer Grenzgeschwindigkeit, so trifft der Stein die Erde nicht, sondern umrundet sie im freien Fall. Er erreicht die Abwurfstelle am Ort V und durchläuft seine geschlossene Bahn immer wieder.

Auch das Wesen der Raumfahrt im Erdorbit und die dabei auftretende Schwerelosigkeit lassen sich anhand dieser Darstellung einführen und verständlich machen, wenn man noch die Galileische Erkenntnis eines gleichschnellen Falls aller Körper, unabhängig von deren Masse, mit hinzunimmt. Newtons Diagramm wird im Folgenden als Vorbild für die weiteren Betrachtungen, die dann auch Keplerorbits einbeziehen, verwendet.

Ist die eingangs angeführte "Erklärung" in jedem Fall falsch, oder ist doch eine Situation denkbar, wo sie stimmt? - Tatsächlich gibt es ein sinnvolles und realistisches Beispiel, wo sie völlig richtig und auch anschaulich ist, und das soll hier natürlich nicht unterschlagen werden. Im Umkehrschluss wird dann nochmals deutlich, warum sie im oben genannten und im üblich verwendeten Sinn falsch ist. Die Erklärung auf der Basis eines Kräftegleichgewichts gilt für die Beschreibung eines geostationären Satelliten aus der Sicht eines irdischen Beobachters!

Ein geostationärer Satellit bewegt sich auf einer Kreisbahn (die übliche Idealisierung!) in einer Höhe von rd. 36000 Kilometern über der Erdoberfläche. In dieser Höhe läuft er mit einer Winkelgeschwindigkeit um die Erde herum, die jener der Erddrehung gleicht. Folglich scheint er, von der drehenden Erde aus betrachtet, über der Erde stillzustehen, wodurch sich ja auch der Name "geostationär" erklärt. Für den auf der Erde mitrotierenden Beobachter gilt nun die Betrachtung des Kräftegleichgewichts zwischen der Zentrifugalkraft, die der Satellit im mitrotierenden System erfährt, und der Schwerkraft. Sie sind gegengerichtet gleichgroß, weshalb der Satellit für den mitrotierenden Beobachter kräftefrei ist. Er schwebt aus seiner Sicht an einem gleichbleibenden Ort über der rotierenden Erde, ohne hinunterzufallen (wegen der Schwerkraft) oder fortzudriften (wegen der Zentrifugalkraft) - wodurch die Gleichgewichtssituation im mitrotierenden System begründet ist. Der außenstehende Beobachter sieht natürlich die Kreisbahn des Satelliten, aus der er auf die Existenz einer Zentripetalkraft schließt, die er wieder in der Schwerkraft zwischen Erde und Satellit findet.

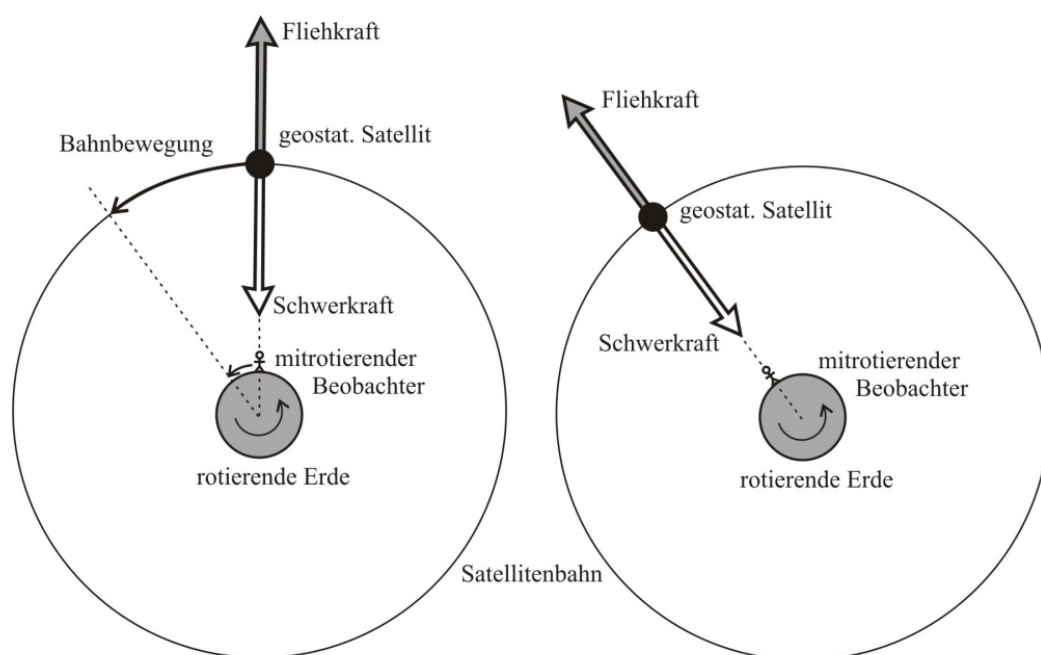


Abbildung 3: Die "Erklärung mit Fliehkraft" ist nur richtig bei der Beobachtung aus einem mit der Winkelgeschwindigkeit des Satelliten mitrotierenden Bezugssystem, wie im Fall des geostationären Satelliten. Der Beobachter auf der Erde sieht über sich einen kräftefrei schwebenden Satelliten. Die Bahnbewegung erkennt er nicht, da er sich in der gleichen Winkelgeschwindigkeit mitdreht (Bild links) und ständig durch die eigene Drehbewegung unterhalb des Satelliten verbleibt (rechts), was ihm die Deutung eines Gleichgewichts von Kräften auf den scheinbar still stehenden Satelliten ermöglicht.

Überträgt man diese Betrachtung zurück auf den Fall der Planetenbewegung, so stimmt die "Erklärung" nur für einen Beobachter, der sich mit der Winkelgeschwindigkeit der Planetenbewegung in der Sonne oder auf der Sonne mitdreht, so dass ihm der Planet in seinem rotierenden Bezugssystem stationär vorkommt. An einen solchen, völlig abstrakten und gekünstelt anmutenden sich drehenden Beobachter, der sich überdies für jeden Planeten mit einer jeweils anderen Geschwindigkeit drehen müsste, ist aber augenscheinlich nicht gedacht.

2) Didaktische Vorteile der Keplerbewegung gegenüber Newtons Theorie

Johannes Kepler fand die Gesetzmäßigkeiten der Planetenbewegung in den ersten zwei Jahrzehnten des 17. Jahrhunderts. Man findet diese Erkenntnisse, neben den vielen anderen vorläufigen und wieder verworfenen Ideen, Irrungen und Wirrungen die Planetenbewegung betreffend, in seinen Werken *Astronomie Nova* von 1609 und *Harmonices Mundi* von 1619 schriftlich festgehalten.

Heutzutage gießt man sie in drei Merksätze, die man in dieser Form so nicht in Keplers Schriften findet, die sich aber daraus erschließen lassen. Deshalb variieren sie in den Lehrbüchern auch gelegentlich hinsichtlich ihrer Formulierung etwas.

Die drei Keplerschen Gesetze der Planetenbewegung lauten:

1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen, in deren einem Brennpunkt die Sonne liegt.
2. Die Verbindungslinie zwischen Planet und Sonne überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
3. Die Kuben der großen Halbachsen der Planetenbahnen verhalten sich wie die Quadrate der Umlaufzeiten.

Kepler konnte auf der Grundlage dieser Gesetze die Bahn der Planeten und die Dynamik der Planeten auf ihrer Bahn sehr genau beschreiben. An eine Übertragbarkeit auf alle Fallphänomene dachte er dagegen überhaupt nicht. Erst mit Newton war klar, dass sich die Planetenbewegung ebenso wie die Fallphänomene auf der Erde mit der Hypothese einer universellen Gravitation zwischen Massen als wesensgleich darstellen und sehr genau einheitlich berechnen lassen.

Damit rückt aber auch die Keplerbewegung in die Position einer deskriptiven Theorie zur Beschreibung aller Fallbewegungen vor, die nicht nur die Bewegung der Planeten um die Sonne zu beschreiben vermag, sondern auch den Fall oder Wurf von Gegenständen hier auf der Erde. Im Raumfahrtzeitalter ist sie außerdem gültig zur Bestimmung von Satellitenbahnen.

Die Keplertheorie hat gegenüber der doch sehr verklausulierten Berechnungstechnik der Newtontheorie auf der Grundlage des Differentialkalküls den Vorteil, dass sie sogleich die Gesamtheit des Fallphänomens in den Blick nimmt - die ganze Bahn und seine Form und den ganzen Umlauf und seine Dauer.

Ihr Manko ist das Fehlen einer Begründung der Bewegung als Folge einer physikalischen Ursache, weshalb sie nicht den hohen Stellenwert einer physikalischen Theorie beanspruchen kann. Wohl aber beschreibt sie die zwangsläufigen Folgen dieser Ursachen (inertiales Bewegungsverhalten einer Körpers und darauf aufgeprägte Beschleunigung durch die Schwerkraft) völlig gleichberechtigt zu Newton in einer viel anschaulicheren geometrischen Sichtweise ohne Verwendung der Differential- und Integralrechnung, was diesen Zugang für die naturkundliche Allgemeinbildung und den Unterricht besonders auszeichnet.

Salopp formuliert: Man muss nicht so viel rechnen wie bei Newton, um das Wesentliche des Falls zu erfassen. Und physikalische Begriffe wie "Kraft" spielen in der Keplertheorie gar keine Rolle. Sie kennt nur Bahngeometrie und Bahndynamik. Insofern eignet sie sich auch als didaktischer Zugang zu Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie, die die Newtonsche Schwerkraft wieder abschafft und den Gezeitenphänomenen in frei fallenden Bezugsräumen, die man wiederum durch die Keplerbewegung anschaulich verstehen kann, eine ganz wichtige Rolle einräumt. Ferner lässt sich mit ihr auf zeichnerischem Wege ein Grundverständnis der Gravitation vermitteln.

Es geht hier natürlich nicht darum, die Newtontheorie zu vermeiden, sondern die Diskussion des Falls um jene Aspekte der Keplerbewegung zu bereichern, die besonders geeignet sind, ein fundamentales Verständnis des freien Falls mit möglichst wenig oder möglichst einfacher Mathematik zu erreichen. Die Newtontheorie wird dabei auch benutzt, wenn es um die Ermittlung der Bahnparameter der Ellipse aus Anfangsbedingungen und den Anschluß der Keplerbewegung an die moderne physikalische Theorie geht.

3) Keplerbewegung und Newtontheorie - eine möglichst einfache Zusammenführung der wichtigsten Aspekte

Aus der Lage eines fallenden Körpers in Bezug zum Schwerkraftzentrum des Zentralkörpers (z.B. die Sonne im Planetensystem) und seiner Geschwindigkeit und dessen Richtung, mit der ein Körper in diese Position eingebracht und dann sich selbst überlassen wird, ergibt sich sogleich die gesamte Bahn und der weitere Flug bzw. Fall des Körpers.

Die freien Parameter des Keplerproblems, nämlich die großen und kleinen Halbachsen der Ellipse (im Folgenden wird immer von geschlossenen Bahnen bei gravitativ gebundenen Körpern ausgegangen, also Ellipsen, nicht jedoch von offenen Bahnen wie Hyperbeln, wie sie bei ungebundenen Körpern, z.B. nur einmal sichtbaren Kometen, auftreten) und der momentane Startpunkt auf der Bahn lassen sich aus der Lage und der Geschwindigkeit eines Körpers zu Beginn der Betrachtung mit Hilfe einiger physikalischer Betrachtungen ermitteln.

Die Abbildung 4 zeigt eine Ellipse mit der Definition der hier notwendigen Begriffe. Eine Ellipse ist die Menge aller Punkte, deren Abstände r_1 und r_2 von zwei Zentren, den Foki F_1 und F_2 , in der Summe immer gleich sind. Die Ellipse wird auch vollständig beschrieben durch die Angabe der beiden Halbachsen a (große Halbachse) und b (kleine Halbachse). Fallen die beiden Foki zusammen, so wird die Ellipse zum Kreis. Zur Beschreibung der Exzentrizität der Ellipse dient der Abstand zwischen dem Mittelpunkt der Ellipse und einem der beiden Foki. Man nennt ihn lineare Exzentrizität e und er ist, ebenso wie die Halbachsen, eine Länge, d.h. eine mit einem absoluten Maß behaftete Größe. Zur Beschreibung gleichgestaltiger aber ungleich großer Ellipsen wird noch die dimensionslose numerische Exzentrizität ε eingeführt, bei der die lineare Exzentrizität e mit der großen Halbachse a in Beziehung gesetzt wird: $\varepsilon = e/a$. Die Brennpunkteigenschaft der Ellipse bedingt die Beziehung $r_1 + r_2 = 2a$ und mit $r_1 = r_2 = a$ erhält man $a^2 = b^2 + e^2$. Die gesamte Fläche A der Ellipse berechnet sich nach $A = \pi \cdot a \cdot b$.

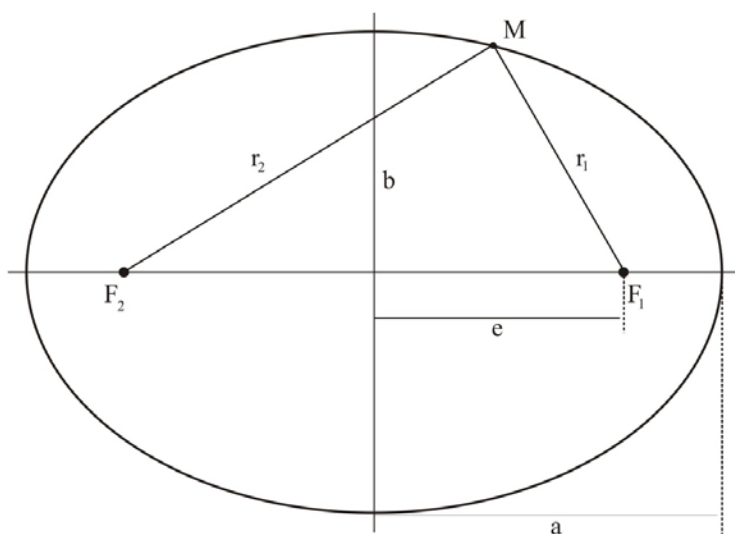


Abbildung 4: Die Ellipse und ihre Parameter

Wie bestimmt man die Halbachsen der Bahnellipse eines mit der Geschwindigkeit \vec{v}_0 am Ort \vec{r}_0 befindlichen frei fallenden Körpers? - Zunächst sei die Beziehung zwischen der Ellipsenfläche A , der Umlaufdauer T und dem Drehimpuls L aufgezeigt. Wir betrachten ein beliebig kleines Teilstück dA der Ellipse, welches in der Zeit dt von der Verbindungslinie Planet-Sonne durchlaufen wird. Sitz der Zentralmasse sei der Fokus F_1 . Ein solches infinitesimal kleines Teilstück kann durch ein spitzwinkliges Dreieck mit der Basis $|\vec{r}_0|$ und der Höhe $h = |\vec{v}_0| \cdot \sin \alpha \cdot dt$ angenähert werden (Abb. 5).

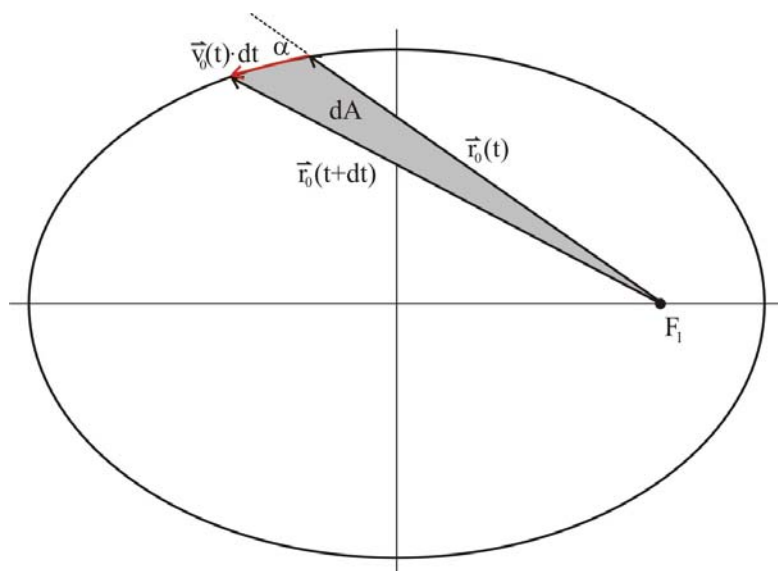


Abbildung 5: Darstellung eines Flächenstücks dA , das in der Zeit dt überstrichen wird. Nähert man es als Dreieck, so kann die Fläche dA aus dem Radius- und Geschwindigkeitsvektor nach der Formel "Grundseite mal Höhe durch zwei" berechnet werden.

Die Fläche dieses Dreiecks beträgt nun: $dA = \frac{1}{2} \cdot |\vec{r}_0| \cdot |\vec{v}_0| \cdot \sin \alpha \cdot dt$

Dieser Ausdruck ist verwandt zum Betrag des Drehimpulses L eines Massepunktes mit der Masse m , der momentanen Geschwindigkeit \vec{v}_0 und dem Abstand \vec{r}_0 vom Zentrum der Bewegung:

$$\vec{L} = \vec{r}_0 \times \vec{p}_0 = m \cdot \vec{r}_0 \times \vec{v}_0$$

$$|\vec{L}| = m \cdot |\vec{r}_0| \cdot |\vec{v}_0| \cdot \sin \alpha = m \cdot \omega \cdot r^2$$

bzw.

$$L = m \cdot r_0 \cdot v_0 \cdot \sin \alpha$$

Der Ausdruck für die Dreiecksfläche lässt sich damit folgendermaßen umformen:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

Der Drehimpuls ist eine zeitliche Erhaltungsgröße, weshalb der Quotient dA/dt auch für ausgedehntere Zeitintervalle gleich bleibt und letztlich auch für den gesamten Umlauf A/T . Die Gleichheit der überstrichenen Flächen dA in Zeitintervallen dt besagt auch das zweite Keplersche Gesetz, womit seine Beziehung zur Drehimpulserhaltung festgestellt ist.

Nun lassen sich auch die Halbachsen der Ellipsen in die Betrachtung einbeziehen:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{const.} = \frac{A}{T} = \frac{\pi \cdot a \cdot b}{T}$$

⇔

$$\frac{\pi \cdot a \cdot b}{T} = \frac{1}{2} \cdot r_0 \cdot v_0 \cdot \sin \alpha$$

Die Newton'sche Physik führt folglich zu einer Verknüpfung der Parameter a , b und T der Keplerbewegung mit der Kinematik des Massenpunktes in Gestalt der Vektoren \vec{r}_0 und \vec{v}_0 , bzw. ihren Beträgen r_0 und v_0 , und dem von diesen Vektoren eingeschlossenen Winkel α zu einem beliebigen Zeitpunkt der Bewegung. Die Größen a , b und T sind aber noch nicht eindeutig bestimmt.

Eine weitere Beziehung zwischen der Keplerellipse und der Newtonschen Physik erhält man, wenn man das Quadrat der Geschwindigkeit v des Massepunktes betrachtet, welches proportional zur kinetischen Energie der Bewegung ist. Ein möglicher Zugang zu dieser Berechnung ist die Bestimmung der Radial- und Orthoradialgeschwindigkeit der Bewegung zu einem bestimmten Zeitpunkt. Das Quadrat der Gesamtgeschwindigkeit ist dann die Summe der Quadrate von Radial- und Orthoradialgeschwindigkeit.

Für diese Betrachtung ist die Polarkoordinatendarstellung $r(\varphi)$ der Ellipse, ausgehend vom besetzten Fokus (hier F_1), erforderlich. Man gewinnt sie mit dem Kosinussatz, angewendet auf das Dreieck (F_1, F_2, M) in Abbildung 6 (der Abstand vom besetzten Fokus F_1 zum Massepunkt M wird nun als r bezeichnet):

$$\overline{MF_2}^2 = \overline{F_1F_2}^2 + \overline{MF_1}^2 - 2 \cdot \overline{F_1F_2} \cdot \overline{MF_1} \cdot \cos(180^\circ - \varphi)$$

⇔

$$(2a - r)^2 = 4e^2 + r^2 + 2 \cdot 2er \cdot \cos \varphi$$

⇔

$$4a^2(1 - \varepsilon^2) = 4ar(1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi)$$

⇔

$$r(\varphi) = \frac{a \cdot (1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi}$$

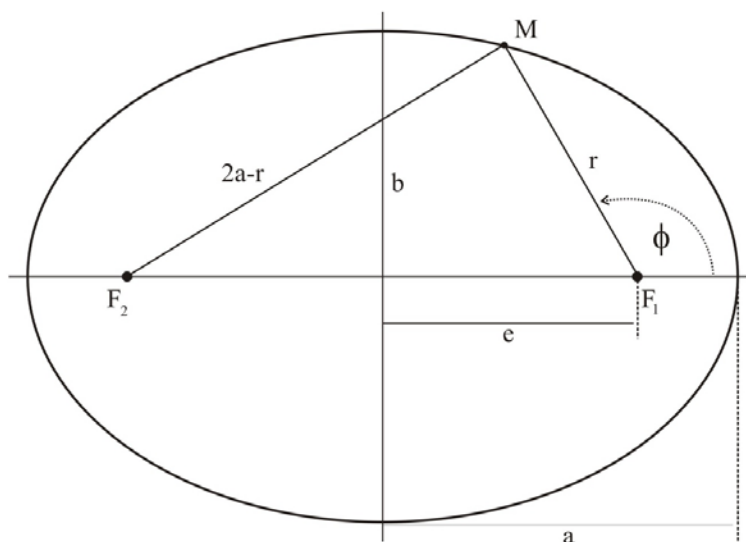


Abbildung 6: Die Ellipse in der Fokaldarstellung, bezogen auf den rechten Fokus.

Durch Einführung des sogenannten Halbparameters (auch "semi latus rectum" genannt) $p = b^2 / a$ stellt sich diese Formel in der folgenden sehr gebräuchlichen Art dar:

$$r(\varphi) = \frac{a \cdot (1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi} = \frac{(a^2 - a^2 \varepsilon^2) / a}{1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi} = \frac{b^2 / a}{1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi} = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi}$$

Diese sog. Fokaldarstellung der Ellipse kann als mathematische Ausformulierung des 1. Keplerschen Gesetzes verstanden werden. Sie ist Grundlage für viele weitere Betrachtungen zur Kinematik der Keplerbewegung. So lässt sich z.B. die größte und kleinste Entfernung eines Planeten zur Sonne unmittelbar mit ihrer Hilfe gewinnen. Die kleinste Entfernung, der Perihelabstand, bestimmt sich zu

$$r_p = r(\varphi = 0) = \frac{a \cdot (1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon} = a \cdot (1 - \varepsilon),$$

während sich die größte Entfernung, der Aphelabstand, zu

$$r_A = r(\varphi = 180^\circ) = \frac{a \cdot (1 - \varepsilon^2)}{1 - \varepsilon} = a \cdot (1 + \varepsilon) \text{ berechnet.}$$

Die Radialgeschwindigkeit v_r erhält man nun durch zeitliche Ableitung der Fokaldarstellung:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = -\frac{p}{(1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi)^2} \cdot \varepsilon \cdot \omega \cdot \sin \varphi = \frac{r^2}{p} \cdot \varepsilon \cdot \omega \cdot \sin \varphi = \frac{\omega \cdot a \cdot b \cdot \varepsilon \cdot \sin \varphi}{p}$$

Bei der letzten Umformung kam die Beziehung

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = \frac{m \cdot \omega \cdot r^2}{2m} = \frac{\pi \cdot a \cdot b}{T}$$

⇔

$$\omega \cdot r^2 = \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot b = \omega \cdot a \cdot b, \text{ mit } \omega = 2\pi / T$$

aus der Drehimpulsbetrachtung zur Anwendung, welche den Drehimpuls des umlaufenden Massenpunktes mit den Größen a , b und T der Ellipsenbahn verknüpft.

Die Orthoradialgeschwindigkeit v_φ erhält man unmittelbar aus dieser Beziehung:

$$v_\varphi = r \cdot \frac{d\varphi}{dt} = r \cdot \omega = \frac{\omega \cdot a \cdot b}{r}$$

Man erhält nun bei der Addition der Quadrate der Beträge dieser senkrecht zueinander stehenden Geschwindigkeitsvektoren einen Ausdruck für die Gesamtgeschwindigkeit v :

$$v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2 = \frac{\omega^2 \cdot a^2 \cdot b^2}{p} \cdot \left[\frac{\varepsilon^2 \cdot \sin^2 \varphi}{p} + \frac{p}{r} \right]$$

Mit $p = b^2/a$ und der Fokaldarstellung der Ellipse folgt daraus nach einigen Umformungen (zunächst die Fokaldarstellung in beide Summanden einbringen, dadurch jedes p eliminieren, dann den Hauptnenner bilden, vereinfachen und geeignet in die beiden Ergebnisanteile aufspalten):

$$v^2 = \omega^2 \cdot a^3 \cdot \left[-\frac{1}{a} + \frac{2}{r} \right]$$

\Leftrightarrow

$$v = \sqrt{\omega^2 \cdot a^3 \cdot \left[-\frac{1}{a} + \frac{2}{r} \right]}$$

Mit Hilfe der Beziehungen für den Perihel- bzw. Aphelabstand erhält man damit z.B. die Perihelgeschwindigkeit v_P und die Aphelgeschwindigkeit v_A :

$$v_P = \omega \cdot a \cdot \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}$$

$$v_A = \omega \cdot a \cdot \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}$$

Das dritte Keplersche Gesetz behauptet die Konstanz des Quotienten a^3/T^2 , bzw.:

$$a^3 \cdot \omega^2 = k$$

Die Konstante k lässt sich nun im Rahmen der Newtonschen Physik durch Vergleich des Ausdrucks für v^2 mit der Energiebilanz des Massenpunktes im Gravitationspotential der Zentralmasse M ermitteln. Die Gesamtenergie der Masse m ist die Summe aus der kinetischen und der potentiellen Energie. Da wir nur gebundene Zustände diskutieren (Ellipsenbahnen), ist die Gesamtenergie negativ:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = E < 0$$

Der Vergleich liefert:

$$k = GM$$

$$E = -\frac{1}{2} \cdot G \frac{Mm}{a}$$

Die Gesamtenergie hängt damit nur von der großen Halbachse ab, nicht jedoch von der Exzentrizität der Ellipse. Die hier abgeleiteten Formeln gehen allerdings davon aus, dass M sehr viel größer als m ist, wie es im Planetensystem und bei der Raumfahrt auch der Fall ist.

Die Keplerschen Gesetze sind damit an die Physik Newtons angeschlossen und man kann nun aus der Angabe der Position einer Masse und ihrer Geschwindigkeit in Bezug zum Zentrum der Keplerbewegung die Gestalt und Lage der Ellipse, die die Bahn des frei fallenden gebundenen Körpers beschreibt, bestimmen.

4) Keplerellipsen im Newton-Diagramm

Das berühmte Newton-Diagramm des freien Falls wird jetzt mit den im vorangegangenen Abschnitt abgeleiteten Formeln geometrisch ausgewertet, ohne das eine weitere Bezugnahme auf Newtonsche Begriffe wie Schwerkraft, Trägheitsbewegung, Zentrifugalkraft, Bezugssystem etc. nötig wäre.

Die vom Berg waagrecht abgeworfenen Steine fallen auf Keplerellipsen. Wo die Keplerbahn die Erde durchschneidet endet der freie Fall mit dem Absturz bzw. mit der Kollision mit der Erde. Aus der Gestalt der die Erde ganz umschließenden Kreisbahn (von V nach V in Abb. 2) lässt sich nun die Geschwindigkeit des Steins auf dieser Bahn ermitteln. Der Abwurfspunkt hat den Abstand $r = R + H$ von der Erdmitte (R : Erdradius; H : Höhe des Berges). Die Bahn ist kreisförmig und folglich kann die große Halbachse der Ellipse mit r gleichgesetzt werden (Abb. 7).

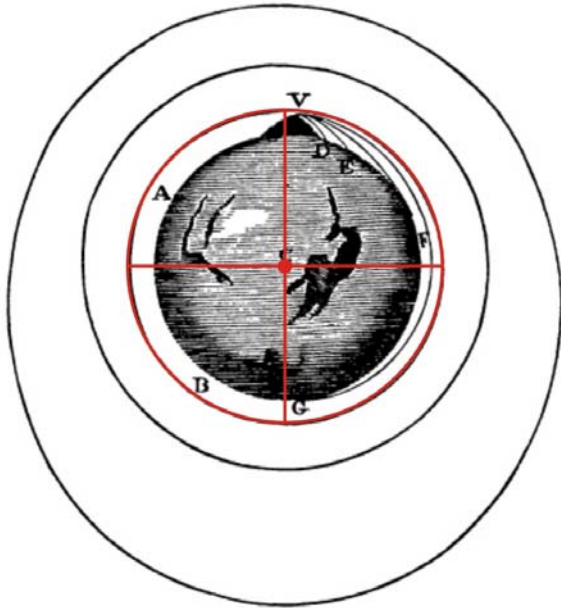


Abbildung 7: Die große Halbachse der geschlossenen Kreisbahn und der Abstand vom Abwurfspunkt zur Erdmitte, die auch in der Kreisbahnmitte liegt, entsprechen jeweils dem Radius der Kreisbahn. Damit ist die Geschwindigkeit des Abwurfs bestimmbar.

$$\text{Mit } v^2 = GM \cdot \left[-\frac{1}{a} + \frac{2}{r} \right]$$

und $a = r = R + H$ erhält man:

$$v^2 = GM \cdot \frac{1}{R + H} \approx GM \cdot \frac{1}{R}$$

Da die Höhe H des Berges klein ist gegen den Erdradius R (auch wenn er in Newtons Zeichnung aus darstellungstechnischen Gründen übertrieben groß gemacht ist), kann man sie für die Berechnung der Grenzgeschwindigkeit für das Erreichen des Erdorbits vernachlässigen. Mit den folgenden Werten für die Gravitationskonstante G , Erdmasse M und Erdradius R aus dem Physikbuch

$$G = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

$$M = 5,9736 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$R = 6371 \text{ km}$$

erhält man für die Grenzgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{GM / R} = 7,91 \text{ km/s}$$

Diese Geschwindigkeit, die eine Rakete erreichen muss, wenn sie nicht wieder auf die Erde zurückfallen soll, wird auch "Erste Kosmische Geschwindigkeit" genannt.

Das Ergebnis lässt sich auch auf einem anderen Weg ermitteln, der eher im Sinne Keplers wäre. Das Dritte Keplersche Gesetz verknüpft die Bahnbewegungen verschiedener Himmelskörper um die gleiche Zentralmasse. Die Konstante GM kann deshalb durch die Halbachse und die Umlaufdauer eines anderen bekannten Erdsatelliten ausgedrückt werden. Wir wollen es mit dem Mond versuchen, auch wenn seine Bahn keine einfache Keplerellipse ist, weil sein Lauf u. a. durch die Sonne stark beeinflusst wird, die ihn bei der einfachen Keplerbewegung um die Erde stört. Außerdem ist die Voraussetzung einer gegenüber der Zentralmasse M kleinen Masse m , nun nicht mehr so gut erfüllt wie im Fall der Planeten und der Sonne, weshalb die einfache Formel für die Konstante k aus dem vorherigen Abschnitt nicht mehr ohne Weiteres gilt. Das alles sind aber auch keine ernsthaften Hinderungsgründe es doch einmal mit dem Mond zu versuchen. Nimmt man für seine Umlaufdauer des Mondes um die Erde den siderischen Monat von 27,3217 Tagen und für die große Halbachse das arithmetische Mittel aus dem Perigäumsabstand von 363 300 km und dem Apogäumsabstand von 405 500 km, also $a = 384\,400$ km, so stellt sich die Konstante k folgendermaßen dar:

$$k = GM = \omega^2 a^3 = 4\pi^2 \cdot \frac{a^3}{T^2} = 4,024 \cdot 10^{14} \frac{m^3}{s^2}$$

Die Grenzggeschwindigkeit berechnet sich damit zu $v = 7,95$ km/s .

Wir stellen eine ganz gute Übereinstimmung mit dem zuvor unter Rückgriff auf Lehrbuchwerte für G und M erhaltenen Wert fest, was auch nicht verwundert, da sich das Produkt GM ja nur aus solchen dynamischen Betrachtungen von genau vermessenen Satellitenumläufen um die Erde präzise ermitteln lässt. Der moderne Wert aus der Satellitengeodäsie ist:

$$GM = 3,986 \cdot 10^{14} \frac{m^3}{s^2}$$

Für einfache und schnelle Betrachtungen lässt sich der Zahlenwert dieser Systemkonstante auf $4 \cdot 10^{14}$ runden und abkürzen, was auch für Überschlagsrechnungen praktisch ist, da oft die Quadratwurzel dieser Zahl auftaucht, die sich sogleich im Kopf ausrechnen lässt. Die Gravitationskonstante G lässt sich im Laboratorium bestimmen, und damit eröffnet sich letztlich die Möglichkeit des Rückschlusses auf die Erdmasse.

Die Fallkurven, die im Newton-Diagramm an den Stellen D, E und F auf die Erde treffen, lassen sich nicht gut an Ellipsen anpassen, was sicher den zeichnerischen Möglichkeiten der damaligen Zeit geschuldet ist. Das Diagramm soll ja anschaulich sein, und der Zeichner, der die druckfähige Vorlage erstellt hat, hat hier möglicherweise freihändig gearbeitet und die verschiedenen Linien gut sichtbar nebeneinander gesetzt.

Kritisieren muss man ihn oder Newton aber für die äußere Bahn, die nun nicht mehr durch einen Wurf vom Berg zustande kommen kann und als Sinnbild für natürliche himmlische Bahnen wie z.B. die des Mondes gedacht ist. Diese geschlossene Bahn lässt sich tatsächlich sehr schön an eine Ellipse anpassen (Abb. 8). Der obere Brennpunkt fällt aber nicht mit der Erdmitte zusammen, wie es eigentlich sein müsste. Diese Bahn ist also keine Freifallbahn, sie verletzt das erste Keplersche Gesetz. Gestalterische Gründe lassen sich für diese Abweichung nun nicht anführen. Es handelt sich damit um einen echten konzeptionellen Fehler in der Zeichnung.



Abbildung 8: Die äußere Ellipsenbahn im Newton-Diagramm ist im Widerspruch zu den Keplerschen Gesetzen. Die Erdmitte fällt mit keinem Fokus der Ellipse zusammen (immerhin liegt sie auch nicht in der Ellipsenmitte). Weder ein natürlicher noch ein künstlicher Satellit kann auf einer solchen Bahn die Erde umfallen. Hier irrt Newton, bzw. sein Illustrator.

Gelegentlich wird auch diskutiert, ob man mit einem Wurf vom Berg auch die Punkte A und B erreichen kann. Mit einem waagerechten Wurf geht das nicht, denn mit einer zur großen Halbachse senkrechten Geschwindigkeit und damit verschwindender Radialgeschwindigkeit kann man sich nur im Peri- oder Apogäum der Bahn befinden. Das heißt aber auch, dass die große Symmetrieachse der Ellipse vom Abwurfpunkt zur Erdmitte verläuft und deshalb die Bahnkurve auf der linken Erdhälfte im Newton-Diagramm zum Teilstück auf der rechten Seite symmetrisch sein muss. Die Punkte A und B kann man nur mit einem schrägen Abwurf erreichen. Dieses Beispiel soll später noch bei der zeichnerischen Konstruktion einer Keplerbahn aus Anfangs- oder Endbedingungen behandelt werden.

Das Schaubild in Abbildung 8 geht zwar auf Newton zurück, folgt aber nicht unmittelbar seiner Vorlage, was die Abweichungen und zeichnerischen Unzulänglichkeiten erklären könnte. Die Vorlage aus Newtons eigener Feder ist in Abbildung 9 zu sehen.

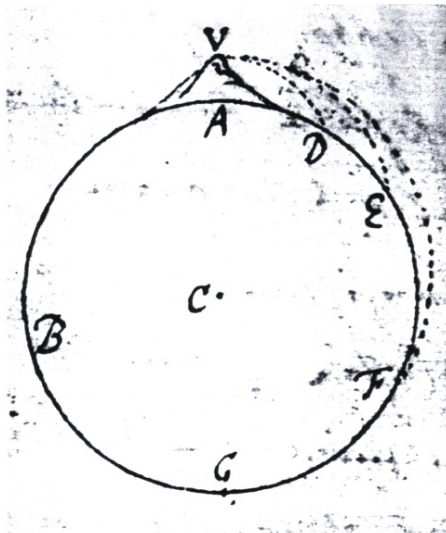


Abbildung 9:
Newtons eigenhändige Vorlage
für das berühmte Diagramm.

Dort fehlt die außenliegende geschlossene Ellipse ganz, ebenso die geschlossene Kreisbahn um die Erde. Das Bild zeigt aber drei sauber gezeichnete Fallkurven, die an den Punkten D, E und F die Erde treffen. Entnimmt man Stützpunkte von diesen gestrichelt gezeichneten Kurven und verbindet man sie jeweils durch bestmöglich angepasste Ellipsen, so stellt man fest, dass auch in diesem Fall kein einziger Brennpunkt dieser drei Ellipsen mit der Kreismitte zusammenfällt (Abb. 10). Am besten passt es noch für die äußerste Bahn deren entfernter Brennpunkt zumindest fast in der Erdmitte liegt.

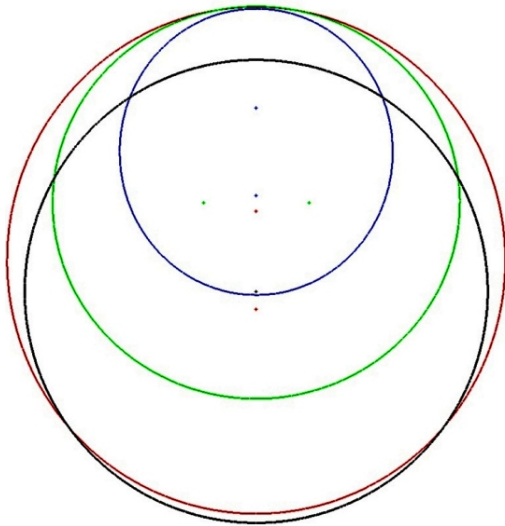


Abbildung 10: Ergebnis der Anpassung von Ellipsen (blau, grün, rot) an die drei Fallkurven der Abbildung 9. Kein Ellipsenbrennpunkt (farbige Kreuzchen) trifft die Erdmitte und die grüne Ellipse ist sogar quer gelagert. Auch Kreissegmente lassen sich noch mit guter Genauigkeit an die Kurvenstücke anpassen, was auf die Verwendung kreisförmiger Schablonen bei der Anfertigung der Zeichnung hindeutet. Streng geurteilt verletzen alle drei Bahnen die Keplerschen Gesetze. Der Erdrand (schwarz) ist sehr genau kreisförmig.

Die Genauigkeit der Bahnrekonstruktion ist hoch - besser als die Dicke von Newtons Federstrich - und die Anpassung von Ellipsen nach der Methode der kleinsten Abstandsquadrate gelingt so gut, dass ein freihändiges Erstellen der Bahnlinien ausgeschlossen werden kann. Newton hat sicher Schablonen verwendet. Auffällig ist aber, dass die drei Ellipsen kaum von der Kreisform abweichen. Die Zeichnung ist insgesamt sehr klein, sie misst nur etwa 4 cm, und so ist es durchaus möglich, dass Newton verschiedene Münzen als Schablonen verwendet hat. Die leichte Exzentrizität der Bahnen könnte dadurch zustande gekommen sein, dass die Feder mehr oder weniger schräggestellt am Münzenrand vorbeigeführt wurde.

Festgehalten werden soll hier, dass auch die Fallbahnen aus Newtons eigener Hand nicht die Keplerschen Gesetze erfüllen, was angesichts der Sorgfalt dieser Zeichnung, die durch die hohe Güte der Ellipsenanpassung nachweisbar ist, doch ein wenig überrascht. Die Bahnkurven sind im Widerspruch zu den Keplerschen Gesetzen.

Abbildung 11 ist eine modifizierte Version des legendären Newton-Diagramms. Sie stellt den Übergang von kleinen zu großen Ellipsen, die durch die Kreisbahn getrennt sind, und den Übergang zu nicht geschlossenen Bahnen dar. Bei Abwurfgeschwindigkeiten unterhalb der Ersten Kosmischen Geschwindigkeit erhält man Ellipsen mit der Erdmitte in dem vom Abwurfpunkt entfernten Fokus. Trifft man beim Abwurf die Erste Kosmische Geschwindigkeit genau, so erhält man den umlaufenden Kreis ("Erdorbit"). Ist die Abwurfgeschwindigkeit höher, so erhält man wieder Ellipsen, jedoch nun mit der Erdmitte im nahen Brennpunkt. Erreicht man bei Abwurf eine Geschwindigkeit, die man als "Zweite Kosmische bzw. Parabolische oder Flucht-Geschwindigkeit" bezeichnet, so erhält man keine geschlossene Bahnkurve mehr und der geworfene Körper entweicht der Erde. Physikalisch bedeutet dies, dass die Gesamtenergie des Satelliten nicht mehr negativ, sondern größer oder gleich Null ist. Bei der Grenzbedingung einer Gesamtenergie von Null, wenn die potentielle Energie des Satelliten im Schwerfeld der Zentralmasse betragsmäßig gleich seiner kinetischen Energie ist, wird die Kurve zur Parabel, bei positiven Gesamtenergien zur Hyperbel. Solche Fälle wollen wir in diesem Aufsatz, der sich auf die geschlossenen Bahnen beschränkt, nicht weiter diskutieren.

Das Auftreten einer Grenze zu offenen Bahnen lässt sich ganz anschaulich deuten als ein Anwachsen der großen Halbachse der Keplerellipsen ins Unendliche.

$$\text{Mit } v^2 = GM \cdot \left[-\frac{1}{a} + \frac{2}{r} \right],$$

$a \rightarrow \infty$ und $r = R$ erhält man dann für die Zweite Kosmische Geschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2GM / R} = 11,19 \text{ km/s}$$

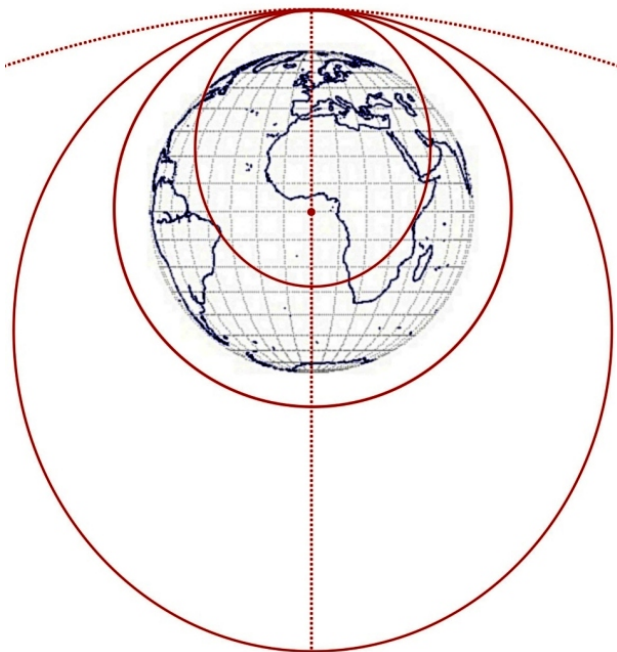


Abbildung 11: Ein waagerechter Abwurf mit einer Geschwindigkeit, die kleiner als die Erste Kosmische Geschwindigkeit ist, führt zu einer Ellipse mit der Erdmitte im entfernten Fokus. Gleich die Abwurfgeschwindigkeit der Ersten Kosmischen Geschwindigkeit, so erhält man einen Kreis ("Erdorbit"), liegt sie darüber, so erhält man eine Ellipse mit der Erdmitte im nahen Fokus. Bei einem Abwurf schneller als die Zweite Kosmische Geschwindigkeit (oben als rote gestrichelte Linie angedeutet), ist die Bahn nicht mehr geschlossen. Im Grenzfall erhält man eine Parabel, ansonsten Hyperbeln. Vorsicht beim Zeichnen solcher Bilder! Man darf nicht irgendwelche Ellipsen an die Abwurfstelle anschmiegen, sondern nur jene, bei denen ein Fokus mit der Erdmitte zusammenfällt.

5) Zeichnerische Konstruktion von Keplerellipsen

In diesem Abschnitt wird die für die Raumfahrt zentrale Fragestellung behandelt, auf welcher Bahn sich ein Satellit bewegt, wenn er von einer bestimmten Stelle mit einer bestimmten Geschwindigkeit abgeschossen wird. Da nur Freifallbahnen diskutiert werden, ist für die Bestimmung der Keplerellipse der Ort und die Geschwindigkeit des Satelliten zum Zeitpunkt des Brennschlusses seiner Triebwerke maßgeblich, nicht etwa die Raketenbrennphase, während er durch Rückstoß eine ständige Geschwindigkeitsänderung erfährt, die nicht vom freien Fall herrührt.

Gegeben ist der Ortsvektor \vec{r}_0 des Satelliten in Bezug auf das Massenzentrum (z.B. die Erdmitte) sowie der Geschwindigkeitsvektor \vec{v}_0 zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 während des freien Falls. Der Geschwindigkeitsvektor liegt innerhalb der Bahnebene der Keplerellipse, die ihrerseits mit einem ihrer Brennpunkte das Massenzentrum erfasst (1. Keplersches Gesetz), weshalb auch der Ortsvektor in der Bahnebene liegt. Diese Ebene wird folglich durch die beiden Vektoren, die nur im Falle eines senkrechten Falls parallel zueinander liegen können, aufgespannt.

Alles spielt sich folglich in einer einzigen Ebene ab, was für die zeichnerische Behandlung von großem Vorteil ist, wenn man die Bahnebene der Bewegung mit der Zeichenebene zur Deckung bringt, wie es im Folgenden immer geschehen soll.

Aus dem Abstand Satellit-Erdmitte r_0 (Betrag von \vec{r}_0) und der Geschwindigkeit v_0 (Betrag von \vec{v}_0) bestimmt man nach der Betrachtung, die auf der Energieerhaltung beruht, zunächst die große Halbachse a der Ellipse:

$$v_0^2 = GM \cdot \left[-\frac{1}{a} + \frac{2}{r_0} \right]$$

⇔

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{GM}$$

Für die Bestimmung der kleinen Halbachse b , die auf dem 2. Keplerschen Gesetz bzw. der Drehimpulserhaltung beruht, sind auch die Richtungen der Vektoren relevant. Da die Zeichenebene in die Bahnebene gelegt wird, kommt es hier nur noch auf den Winkel α zwischen den beiden Vektoren \vec{r}_0 und \vec{v}_0 an, die beide in der Bahnebene liegen (siehe Abb. 5):

$$\frac{\pi \cdot a \cdot b}{T} = \frac{1}{2} \cdot r_0 \cdot v_0 \cdot \sin \alpha$$

⇔

$$b = \frac{r_0 \cdot v_0 \cdot \sin \alpha}{2\pi \cdot a} \cdot T$$

Der Ausdruck $(r_0 \cdot v_0 \cdot \sin \alpha)$ ist der Betrag des Vektors, den man aus dem Kreuzprodukt von \vec{r}_0 und \vec{v}_0 erhält. Liegen diese Vektoren vor, z.B. in einer speziellen Aufgabenstellung, so bestimmt man besten das Kreuzprodukt und dann den Betrag des Ergebnisvektors.

Die letzte Unbekannte in der Bestimmungsformel für b ist die Periodendauer T des gesamten Umlaufs, die man sich schnell mit Hilfe des 3. Keplerschen Gesetzes beschaffen kann, da die große Halbachse ja bereits bekannt ist:

$$a^3 \cdot \omega^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{a^3}{T} = GM$$

⇔

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot a^3}{GM}}$$

Damit ist die Gestalt der Ellipse bekannt. Wie aber konstruiert man ihre Lage im Raum zeichnerisch? - Dazu ist es zweckmäßig, zunächst noch die lineare Exzentrizität zu ermitteln:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Nun liegen alle Informationen für eine zeichnerische Lösung vor. Sie basiert auf der Konstruktion des leeren Fokus der Ellipse. Aus der Brennpunkteigenschaft $r_1 + r_2 = 2a$ kennt man den Abstand des leeren Fokus vom momentanen Ort des Satelliten, der den Abstand r_0 vom besetzten Fokus aufweist. Man zieht folglich einen Kreis mit Radius $2a - r_0$ um den Ort des Satelliten. Der leere Fokus liegt auf diesem Kreis.

Der Abstand des leeren Fokus zum besetzten Fokus ist auch bekannt. Er beträgt das Doppelte der linearen Exzentrizität e . Man schlägt deshalb einen Kreis mit Radius $2e$ um den besetzten Fokus. Der leere Fokus liegt auch auf diesem Kreis. Die beiden Kreise überschneiden sich in zwei Punkten (falls nicht, so ist die Bahn nicht geschlossen).

Einer dieser Schnittpunkte ist der leere Fokus. Die Identifikation des richtigen Schnittpunktes gelingt mit der Auswertung der Richtungsinformation des Geschwindigkeitsvektors, der am Ort des Satelliten tangential an der richtigen Ellipse anliegt. Ist das nicht gleich entscheidbar, so konstruiert man am besten beide möglichen Ellipsen und stellt dann abschließend fest, welche sich an den Geschwindigkeitsvektor anschmiegt und welche nicht

Die Verbindungslinie der beiden Foki - die Fokallinie - gibt die Richtung der großen Achse und damit der Apsidenlinie der Ellipse vor. Man bestimmt im nächsten Schritt die Mitte M der Fokallinie und trägt dann die Strecke a in beiden Richtungen davon ab. Senkrecht zur Fokallinie liegt die kleine Achse der Ellipse. Schlägt man Kreise mit Radius a um die beiden Foki, so schneiden sie die kleine Achse in den Orten des geringsten Abstandes zur Mitte. Damit findet man auch die kleinen Halbachsen und die Ellipse ist hinsichtlich ihrer Form und Lage bestimmt, wenn auch noch nicht vollständig zeichnerisch ausgeführt.

Die Konstruktionsschritte seien hier nochmals übersichtlich zusammengefasst:

- 1) Kreis mit Radius $2a - r_0$ um den Ort S des Satelliten
- 2) Kreis mit Radius $2e$ um den besetzten Fokus
- 3) Auswahl des leeren Fokus als einer der beiden Kreisschnittpunkte nach Auswertung der Richtung des Geschwindigkeitsvektors
- 4) Zeichnen der Fokallinie und Bestimmung des Mittelpunktes M der Ellipse
- 5) Abtragung der großen Halbachse a von M in beiden Richtungen der Fokallinie
- 6) Einzeichnen einer zur Fokallinie senkrechten Linie in M
- 7) Abtragung der kleinen Halbachse b von M in beiden Richtungen dieser Senkrechten oder alternativ
- 7b) Ermittlung der kleinen Halbachsen durch Kreisschlag mit Radius a um die Foki

Hat man die Achsen der Ellipse bestimmt, so kann man ihren Verlauf bereits durch freihändiges Zeichnen zwischen den vier bestimmten Achsenpunkten ganz gut annähern. Will man es besser machen, so schlägt man noch einen Kreis mit Radius a um die Ellipsenmitte und gewinnt weitere Stützstellen auf dem Ellipsenrand, in dem man die Länge der Sehnen, die senkrecht zur großen Achse liegen und bis zum Kreisrand reichen, um den Faktor b/a verkleinert.

Die Abbildung 12 zeigt die Konstruktion der Bahnellipse für den Fall des schon angekündigten Beispiels eines Abwurfs schräg nach oben im Newton-Diagramm. Die Abwurfgeschwindigkeit beträgt 9 km/s und der Abwurfwinkel zur lotrechten Richtung am Abwurfort 60° . Die Zeichnung kann als Vorbild für ein Tafelbild verwendet werden.

Sind die Vektoren für Ort und Geschwindigkeit eines Satelliten bekannt, so kann man nach dieser Methode die weitere Bahn zeichnerisch bestimmen und z.B. Fragen der Art lösen, wie weit der Satellit sich von der Erde entfernt oder ob er vielleicht auf die Erde stürzt. Die Position des Satelliten auf seiner Bahn zu einem bestimmten Zeitpunkt lässt sich damit aber nicht bestimmen. Diese zeitliche Abfolge seiner Orte in der Bahn - die Bahndynamik - macht weitere Betrachtungen erforderlich, die ebenfalls schon von Kepler angestellt und gelöst wurden. Dies wird im folgenden Abschnitt behandelt.

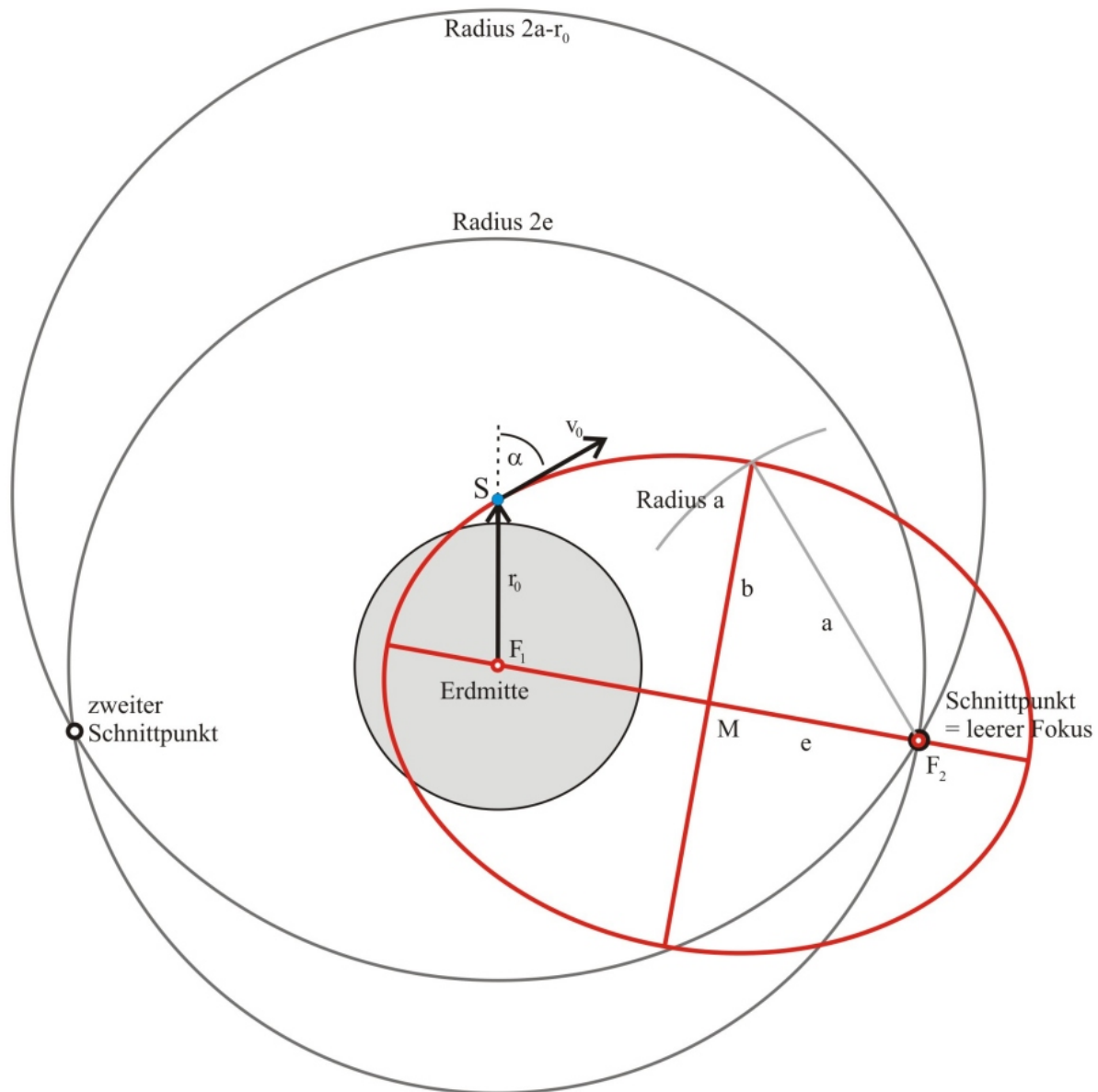


Abbildung 12: Schräger Abwurf von Newtons hohem Berg mit einer Geschwindigkeit von 9 km/s und einem Abwurfwinkel von 60° zur lotrechten Richtung. Man erreicht mit diesem Wurf einen Zielort, der in Wurfrichtung mehr als den halben Erdumfang vom Abwurfort entfernt ist. Zur Ermittlung der Bahnellipse schlägt man Kreise mit den im Text benannten Radien um den Satellitenort S (blauer Punkt) und die Erdmitte, die den besetzten Fokus der Ellipse bildet. Der leere Fokus liegt in einem der beiden Schnittpunkte der zwei Kreise. Durch Verbindung der beiden Foki erhält man die große Achse der Ellipse, senkrecht dazu auf der Mitte M zwischen den Foki die kleine Achse, auf der man die kleine Halbachse durch Kreisschlag mit Radius a um einen der beiden Foki abträgt.

6) Die Keplergleichung als Schlüssel zur Bahndynamik

Zweckmäßig zur Beschreibung der zeitlichen Abfolge der Planetenörter sind die Polarkoordinaten r und φ in der Fokaldarstellung der Ellipse. Der Winkel φ trägt auch die Bezeichnung *wahre Anomalie*. Er wird vom Perihel aus gerechnet. Mit Hilfe des Flächensatzes lässt sich die zeitliche Entwicklung der wahren Anomalie ermitteln, eine für die Positionsbestimmung unerlässliche Aufgabe. Dazu wird zunächst ein Hilfskreis eingeführt, dessen Radius der großen Halbachse a gleicht und der in der Mitte der Bahnellipse gelagert ist (Abb. 13). Vom Ort des Satelliten aus (in Abb. 13 wird der Umlauf der Erde um die Sonne als Beispiel genommen) wird nun eine zur großen Achse der Ellipse senkrechte Linie bis zum

Hilfskreis gezogen. Diese Linie trifft den Hilfskreis an der Stelle E' . Der Radialstrahl von der Mitte aus bis zu dieser Stelle erhebt sich unter einem Winkel E zur Apsidenlinie. Der Winkel E wird *exzentrische Anomalie* genannt. Mit seiner Einführung lässt sich das Problem der Bahndynamik lösen. Er muss mit dem Zeitablauf, der in diesem Zusammenhang *mittlere Anomalie* genannt und mit M bezeichnet wird, und mit der *wahren Anomalie* φ verknüpft werden.

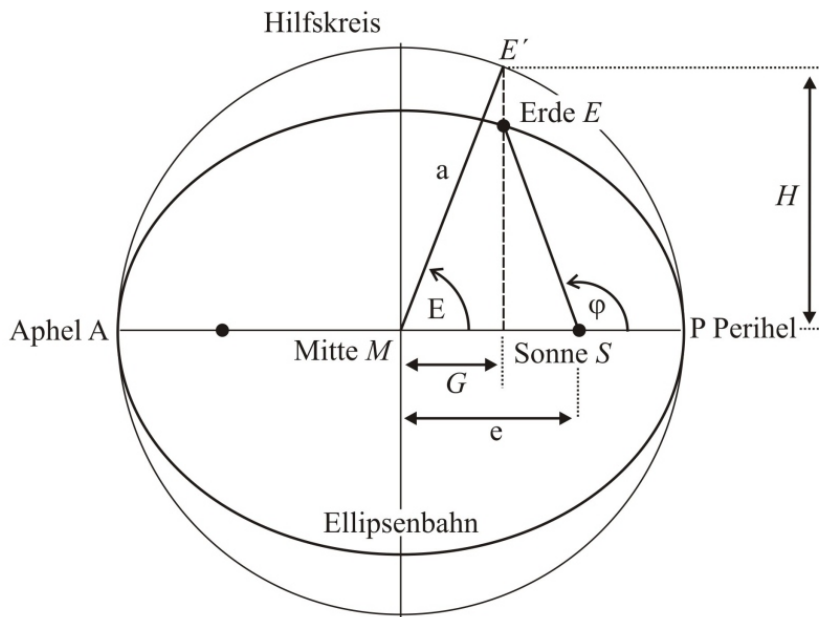


Abbildung 13:
Darstellung einer Keplerellipse mit Hilfskreis und Definition der exzentrischen Anomalie E , mit deren Hilfe sich die Position des Planeten in Abhängigkeit der seit dem Periheldurchgang verstrichenen Zeit ermitteln lässt.

Das Problem der zeitlichen Entwicklung der wahren Anomalie φ ist damit auf die Bestimmung von E und M umgeschichtet. Wie lassen sich diese Größen verknüpfen? - Die seit dem Periheldurchgang in der Abbildung 13 überstrichene Fläche des Ellipsensegments SPE ist nach dem Flächensatz der Bruchteil t/T der Ellipsenfläche πab . Sie lässt sich aber auch mit der Fläche des bis zum Hilfskreis aufgeblähten krummlinigen Dreiecks SPE' in Beziehung setzen, da die Ellipse ein um den Faktor b/a gestauchter Kreis ist. Dieses Flächenstück des Hilfskreises errechnet sich auch aus der Differenz der Flächen MPE' und MSE' . Insgesamt erhält man also:

$$(F(MPE') - F(MSE')) \cdot \frac{b}{a} = \pi \cdot a \cdot b \cdot \frac{t}{T}$$

\Leftrightarrow

$$\left(\frac{1}{2} a^2 E - \frac{1}{2} e a \sin E \right) \cdot \frac{b}{a} = \pi \cdot a \cdot b \cdot \frac{t}{T}$$

\Leftrightarrow

$$E - e \cdot \sin E = 2\pi \cdot \frac{t}{T} = M$$

Dies ist die sog. *Keplergleichung*, die eine Bestimmung der *exzentrischen Anomalie* E für eine Zeit t nach dem letzten Periheldurchgang ermöglicht. Will man eine Planeten- oder Satellitenposition zur Zeit t auf der bekannten Ellipsenbahn berechnen, ist zunächst die *mittlere Anomalie* M zu bestimmen und daraus mit Hilfe der Keplergleichung die *exzentrische Anomalie* E , was wiederum die Berechnung der wahren Anomalie φ ermöglicht, wenn sich noch eine Beziehung zwischen E und φ finden lässt. Diese Beziehung gewinnt man durch geschicktes Kombinieren von $\sin E$, $\cos E$ und $\tan \varphi$. Der Abbildung 13 entnimmt man:

$$\sin E = \frac{H}{a}$$

$$\cos E = \frac{G}{a}$$

$$\tan \varphi = \frac{\frac{b}{a} \cdot H}{G - e} = \frac{b \cdot \sin E}{a \cdot \cos E - e}$$

Durch Auswertung der Abbildung 13 bzw. durch weitere trigonometrische Umformungen des obigen Ausdrucks erhält man auch die folgenden gebräuchlicheren Beziehungen (ohne Beweis):

$$\cos \varphi = \frac{\cos E - e}{1 - e \cdot \cos E}, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{1 - e^2} \cdot \sin E}{1 - e \cdot \cos E} \quad \text{bzw.} \quad \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} \cdot \tan\left(\frac{E}{2}\right)$$

Hat man erst einmal die *wahre Anomalie* φ ermittelt, gelingt die Bestimmung der Radialkoordinate mit Hilfe der Fokaldarstellung der Ellipse:

$$r(\varphi) = \frac{a \cdot (1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi}$$

Die Keplergleichung, die das zentrale Element in dieser Berechnungskette ist, lässt sich nicht analytisch lösen. Zur Bestimmung von E müssen numerische Lösungsverfahren oder Näherungen herangezogen werden. Ist die Exzentrizität der Planetenbahn klein, so unterscheidet sich E nicht wesentlich von M , und es lässt sich mit folgender Vereinfachung weiterarbeiten, die nur lineare Terme in ε berücksichtigt:

$$\begin{aligned} E &= M + \varepsilon \cdot \sin E \\ &\approx M + \varepsilon \cdot \sin M \end{aligned}$$

Genauer ist schon die zweite Näherung, die auch den Term proportional zu ε^2 mit aufnimmt:

$$\begin{aligned} E &= M + \varepsilon \cdot \sin E \\ &\approx M + \varepsilon \cdot \sin M + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \cdot \sin(2M) \end{aligned}$$

Ein einfaches iteratives Verfahren basiert auf dem folgenden Rekursionsverfahren. Im ersten Schritt nimmt man die oben genannte einfache Näherung für E :

$$E_1 = M + \varepsilon \cdot \sin M$$

Danach setzt man im zweiten Schritt als Argument des Sinus E_1 wieder ein und wiederholt diese Prozedur solange, bis sich die Werte für E_n und E_{n-1} nicht mehr wesentlich unterscheiden (wie sehr sie sich noch unterscheiden dürfen, hängt von der geforderten Genauigkeit der Positionsbestimmung ab):

$$E_2 = M + \varepsilon \cdot \sin E_1$$

$$E_3 = M + \varepsilon \cdot \sin E_2$$

...

$$E_n = M + \varepsilon \cdot \sin E_{n-1}$$

Dieses Verfahren konvergiert für kleine Exzentrizitäten schnell gegen den gesuchten Wert von E und für große Exzentrizitäten leider etwas weniger schnell.

Eine weitere Möglichkeit der Bestimmung von E aus M bietet die Abbildung 14. Dort sind mit der eben geschilderten iterativen Methode für verschiedene Exzentrizitäten Kurven berechnet und dargestellt worden, die die Abhängigkeit $E(M)$ wiedergeben. Bei bekannter Exzentrizität sucht man sich die passende Kurve heraus (bzw. interpoliert sinnvoll bei Zwischenwerten), geht mit dem Wert für M in die Grafik hinein und entnimmt auf der Hochachse das zugehörige E .

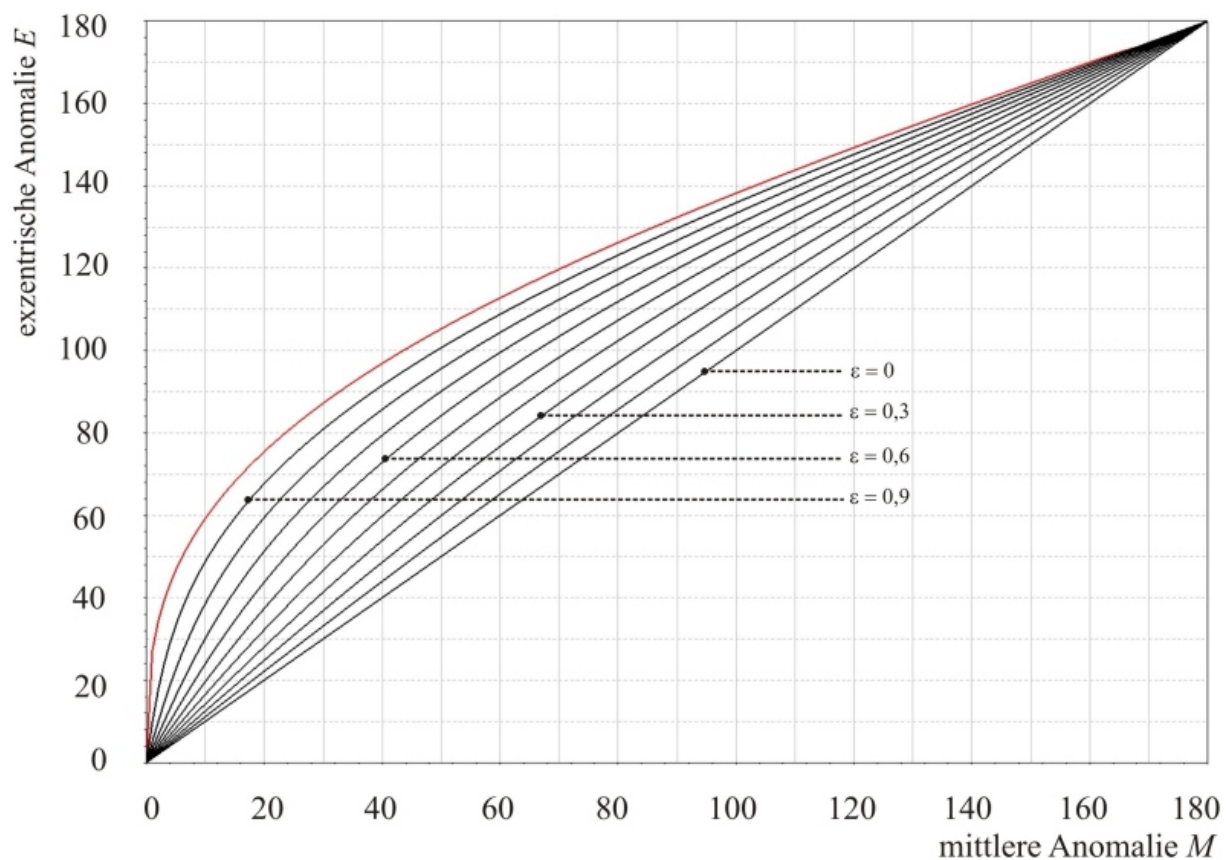


Abbildung 14: Zusammenhang zwischen der mittleren Anomalie M und der exzentrischen Anomalie E für neun verschiedene Exzentrizitäten (in Schritten von 0,1). Die rote Linie bezeichnet den Zusammenhang für eine gerade Falllinie mit einer numerischen Exzentrizität von 1.

Die unterste Linie der Kurvenschar entspricht einer Exzentrizität von Null. Dann erhält man den von der Kreisbahn bekannten linearen Zusammenhang zwischen E und M . Da die Bahndynamik in Symmetrie zur Apsidenlinie erfolgt, ist es ausreichend, das Verhalten für den halben Umlauf, also bis $M = 180^\circ$ zu bestimmen.

Jetzt liegen alle Kenntnisse vor, die zur Bestimmung der Keplerellipse und zur Ermittlung der Position eines Planeten oder Satelliten innerhalb seiner Bahn in Abhängigkeit von der Zeit benötigt werden. bei der vollen Analyse der räumlichen Position eines Himmelskörpers in Planetensystem (z.B. eines Kometen) muss auch die Lage der Ellipse im Raum, ihre Neigung und Orientierung hinsichtlich der Erdbahn und das Datum des letzten Periheldurchgangs bekannt sein. Es kommen also weitere zu bestimmende Parameter hinzu, die man - zusammen mit den Halbachsen der Ellipse bzw. der großen Halbachse und ihrer Exzentrizität als

Bahnparameter bezeichnet. Die Abbildung 15 stellt diese Bahnparameter für Planeten- oder Kometenbahnen im Sonnensystem mit der Sonne als Zentralmasse und der Erdbahnebene (Ekliptik) als Bezugsebene vor. Hier bleiben die weiteren Bahnparameter ohne Bedeutung, da im Folgenden nur Beispiele behandelt werden sollen, für die die Kenntnis der genauen Lage der Ellipse im Raum nicht zwingend erforderlich ist.

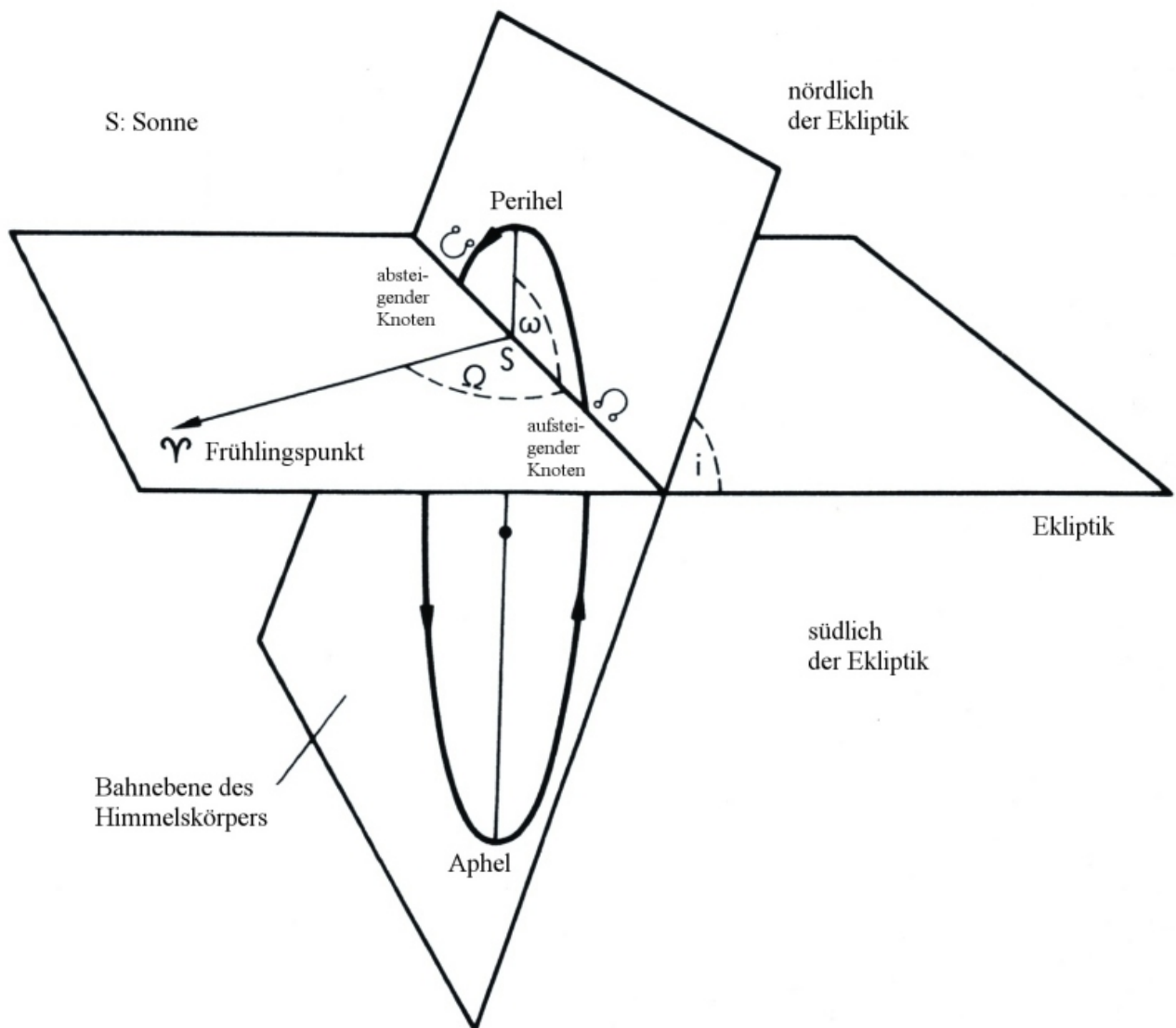


Abbildung 15: Bahnparameter für geschlossene Bahnen im Planetensystem. Neben der großen Halbachse und der Exzentrizität, die für die Beschreibung der Position innerhalb der Bahnellipse erforderlich sind, kommen noch vier weitere hinzu, von denen drei die Lage der Ellipse im Raum in Bezug zur Ekliptik beschreiben (die Bahninklination i , die Lage des aufsteigenden Knotens in Bezug zum Frühlingspunkt Ω , die Länge des Perihels ω , gemessen vom aufsteigenden Knoten) und einer - die Durchgangszeit durch das Perihel - der Festlegung eines Bezugszeitpunktes für die Abfolge der Planetenpositionen im Laufe der Zeit dient.

7) Ein Beispiel für die Anwendung der Keplergleichung zur Positionsbestimmung

Ein periodischer Komet habe momentan einen Abstand von fünf Astronomischen Einheiten (5 AE) von der Sonne und bewege sich mit einer Geschwindigkeit von 10 km/s auf seiner Bahn, wobei zwischen der Geschwindigkeitsrichtung und der Richtung zur Sonne ein Winkel von 45° bestehe. Mit den Formeln des Abschnittes 5 erhält man folgende Bahnparameter (in der Rechnung wird die Sonnenmasse benötigt, $M_s = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$):

Große Halbachse:	$a = 4,207 \text{ AE}$
Kleine Halbachse:	$b = 2,066 \text{ AE}$
Lineare Exzentrizität:	$e = 3,664 \text{ AE}$
Numerische Exzentrizität:	$\varepsilon = 0,871$
Umlaufdauer:	$T = 8,627 \text{ a}$

Die Bahnellipse ist in der Abbildung 16 aufgezeichnet. Sie kann, wie im vorvergangenen Abschnitt beschrieben, zeichnerisch gewonnen werden.

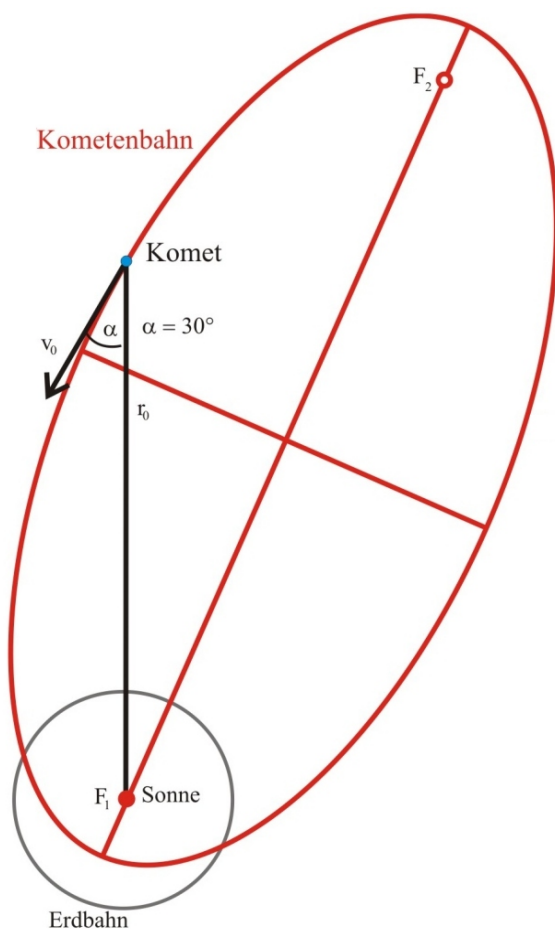


Abbildung 16:

Aus den Werten für den Sonnenabstand eines Kometen, seine Geschwindigkeit und deren Richtung zu einem bestimmten Zeitpunkt lässt sich die Kometenbahn ermitteln. Die Erdbahn mit dem Radius 1 AE (astronomische Einheit) ist als Kreis mit eingezeichnet, was voraussetzt, dass die Erde und der Komet sich beide in der Zeichenebene bewegen.

Wie lange dauert es, bis der Komet sein Perihel erreicht hat, wann ist er nach dem Periheldurchgang im Abstand von 1 AE zur Sonne zu finden, und welchen Abstand hat er zwei Jahre nach dem Periheldurchgang von der Sonne? - Zur Beantwortung dieser Fragen ist der Hilfskreis um den Ellipsenmittelpunkt einzuzeichnen, mit dessen Hilfe sich jeweils die exzentrische Anomalie E für diese Situationen bestimmen lässt. Die Abbildung 17 besteht aus zwei Teilbildern, die die jeweilige Situation mit Hilfskreis für die ersten beiden Teilfragen darstellen. In diesen Skizzen wird E mit dem Winkelmaß gemessen. Natürlich kann man die Werte auch ausrechnen, aber die Entnahme aus der Zeichnung ist einfach, anschaulich und hinreichend genau für ein Übungsbeispiel.

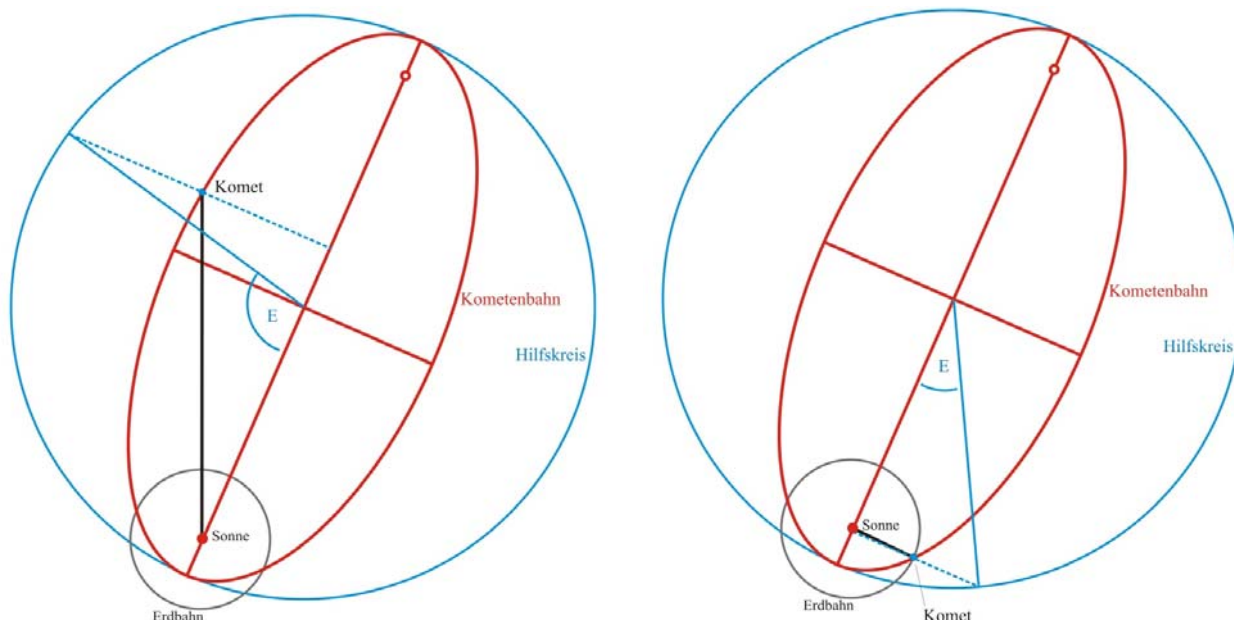


Abbildung 17: Die Kometenbahn aus Abbildung 16 (rote Ellipse) mit dem Hilfskreis (blau) zur Ermittlung der exzentrischen Anomalie E in den beiden ersten Aufgaben. Links der Ausgangszustand mit $E = 103^\circ$ (bis zum nächsten Periheldurchgang gerechnet; bei dem gegebenem Bewegungssinn des Kometen besser $257^\circ = 360^\circ - 103^\circ$ seit dem letzten Periheldurchgang); rechts der Zustand mit dem Kometen im Sonnenabstand von $1 AE$ nach dem Periheldurchgang mit $E = 28,5^\circ$. Beide Werte für E wurden den Zeichnungen mit dem Winkelmaß etwa auf ein halbes Grad genau entnommen.

Man bekommt $E_1 = 103^\circ$ für die Spanne vom momentanen Ort bis zum Perihel (Abb. 17 links) und $E_2 = 28,5^\circ$ für die Spanne vom Perihel bis zu jenen Ort, bei dem der Sonnenabstand des Kometen $1 AE$ beträgt (Schnittpunkt der Kometenbahn mit der Erdbahn; Abb. 17 rechts).

Ist E bekannt so lässt sich der zugehörige Wert für M sogleich mit Hilfe der Keplergleichung berechnen (vor Einsetzen in die Keplergleichung E in Radiant umrechnen!):

$$M_1 = 2\pi \cdot \frac{t_1}{T} = E_1 - \varepsilon \cdot \sin E_1 = 0,949$$

$$M_2 = 2\pi \cdot \frac{t_2}{T} = E_2 - \varepsilon \cdot \sin E_2 = 0,082$$

Für die gesuchten Zeitintervalle erhält man schließlich:

- 1) Zeitspanne vom momentanen Ort bis zum Erreichen des Perihels: $t_1 = 1,3$ Jahre
- 2) Zeitspanne vom Perihels bis zum Ort in $1 AE$ Abstand zur Sonne: $t_2 = 41$ Tage

In der dritten Teilaufgabe ist nach dem Sonnenabstand des Kometen zwei Jahre nach dem Periheldurchgang gefragt. Gegeben ist mithin die Zeitspanne $t_3 = 2 a$ und daraus

$M_3 = 360^\circ \cdot 2 a / 8,627 a = 83,5^\circ$ (hier im Gradmaß, nicht in Radiant). Der Abbildung 14 entnimmt man nun für $M = 83,5^\circ$ und $\varepsilon = 0,87$ den Wert von $E = 122,5^\circ$, mit dessen Kenntnis sich der Ort des Kometen konstruieren lässt. Die Zeichnung ähnelt der Abbildung 17 links (weswegen hier auf eine neue Abbildung verzichtet wird), jedoch mit dem Kometen auf dem rechten Teilstück der Ellipse, das nach dem Periheldurchgang durchlaufen wird.

8) Der lotrechte Fall

Die Keplerschen Gesetze können natürlich auch auf den lotrechten Fall angewendet werden. Die Bahnkurve ist dann linear, bzw. kann als Ellipse mit verschwindender kleiner Halbachse und der numerischen Exzentrizität $\varepsilon = 1$ aufgefasst werden. Eine große Halbachse lässt sich dieser zum Strich entarteten Ellipse auch weiterhin zuweisen und mit ihrer Kenntnis kann man nach dem dritten Keplerschen Gesetz auch eine Umlaufdauer finden.

Die Fallkurve bleibt auch geschlossen, solange die Gesamtenergie aus kinetischer und positiver Energie negativ ist und folglich bedeutet dies im Prinzip die ständige Wiederkehr des fallenden Körpers zum Ausgangspunkt. Allerdings wird der Fall durch den Aufprall auf die Zentralmasse beendet, weshalb es praktisch nicht zu einer Wiederkehr, sondern nur zu einem einmaligen Durchlaufen der halben Bahn kommt.

Im folgenden hypothetischen Beispiel des lotrechten Falls der Erde in die Sonne wird demonstriert, dass man mit Hilfe der Keplerschen Gesetze zu einer ganz einfachen und schnellen Lösung für die Falldauer kommt. Angenommen, die Erde würde auf ihrer jährlichen Bahn um die Sonne durch irgend einen äußeren Einfluss plötzlich vollständig abgestoppt. Wie lange dauert es dann, bis sie in die Sonne hineinstürzt? - Die Abbildung 18 zeigt diese Situation. Angedeutet ist die fast kreisförmige normale Bahn der Erde um die Sonne. Der mittlere Abstand Erde-Sonne ist die große Halbachse a der Erdbahnellipse (die Astronomische Einheit). Wird die Erde gestoppt, so fällt sie in der Folgezeit schnurstracks auf die Sonne zu.

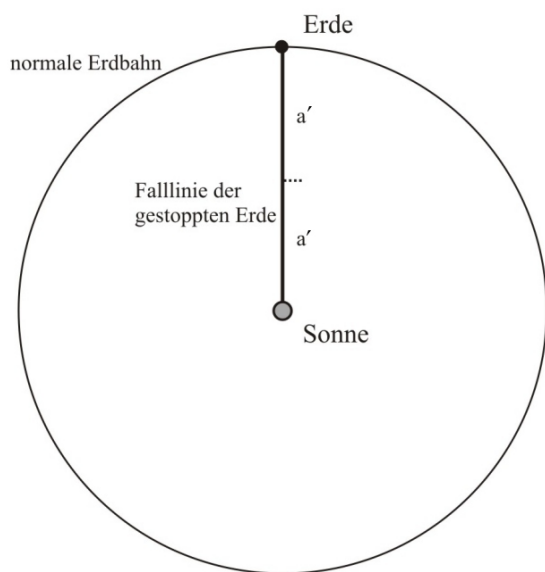


Abbildung 18: Fall der gestoppten Erde in die Sonne. Die Fallkurve ist nun zwar linear, nicht mehr elliptisch, sie kann aber dennoch mit den Keplerschen Gesetzen behandelt werden. Die große Halbachse dieser Falllinie entspricht der halben Astronomischen Einheit.

Mit der Formel für die große Halbachse a aus dem momentanen Abstand $r_0 = a$ und der momentanen Geschwindigkeit $v_0 = 0$ erhält man sogleich die neue große Halbachse a' der Absturzlinie. Sie ist halb so groß wie die die Astronomische Einheit des normalen Erdumlaufs:

$$\frac{1}{a'} = \frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{GM} = \frac{2}{a} \quad \Leftrightarrow \quad a' = a/2$$

Die kleine Halbachse ist null, da $v_0 = 0$ ist. Mit dem dritten Keplerschen Gesetz erhält man nun die volle Umlaufdauer T' der fallenden Erde auf dieser zur Sonne lotrechten Bahn. Die tatsächliche Zeitdauer τ des Absturzes in die Sonne ist die Hälfte davon:

$$\tau = \frac{1}{2} \cdot T' = \frac{1}{2} \cdot T \cdot \left(\frac{a'}{a}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \cdot T \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{T}{4 \cdot \sqrt{2}} = \frac{365,25 \text{ d}}{4 \cdot \sqrt{2}} \approx 64,5 \text{ d}$$

Mit Newtons Physik wäre es sehr viel umständlicher, dieses Ergebnis zu erzielen. Man müsste die sich auf der Fallstrecke ständig vergrößernde Anziehungskraft berücksichtigen, folglich die Fallstrecke in infinitesimal kleine Teilstrecken aufteilen, diese jeweils gesondert behandeln und alle aufintegrieren.

Schnell und leicht gelangt man mit den Keplerschen Gesetzen zu Ergebnissen, die die Bahn in ihrer Gesamtheit betreffen (Bahnform, gesamte Umlaufdauer bzw., deren Hälfte für die symmetrischen Teilstücke der Bahn). Eine genaue Beschreibung der Erdposition zu jedem Zeitpunkt ihres Absturzvorgangs setzt aber zusätzlich noch die Lösung der Keplergleichung mit einer Bahnexzentrizität von $\varepsilon = 1$ voraus. Ist E bestimmt (z.B. wieder aus Abb. 14; siehe die rote Linie dort), so erhält man den Abstand r des Körpers von der Zentralmasse gemäß:

$$r = a \cdot (1 - \cos E)$$

Die Abbildung 19 veranschaulicht diese spezielle Situation. Die Formel für r erhält man bei der Auswertung des rechtwinkligen Dreiecks MPE' durch die Bildung des Kosinus von E .

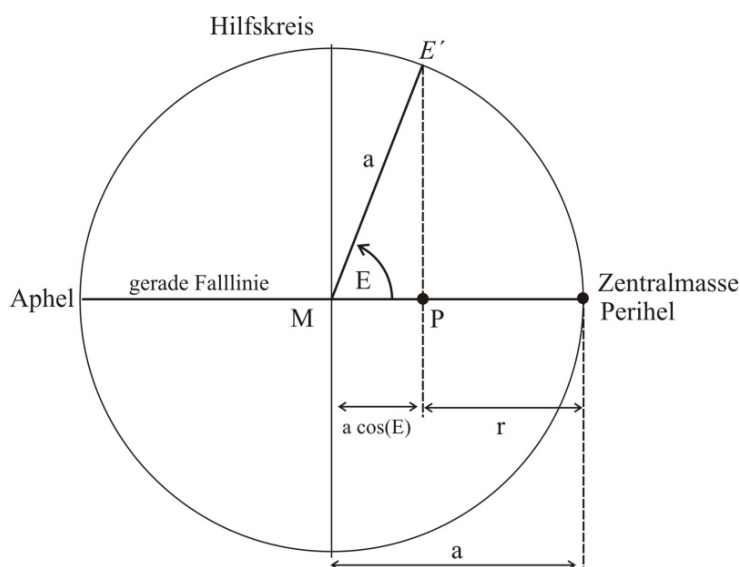


Abbildung 19:
Darstellung einer linearen Falllinie für den lotrechten Fall mit Hilfskreis und Definition der exzentrischen Anomalie E .

Lässt sich diese Betrachtung auch in Einklang mit dem von Galilei erkannten und von Newton mit seiner Gravitationshypothese begründeten Fallgesetz bringen, welches sich für den lotrechten Fall aus der Ruheposition in die bekannte Formel $s = 1/2 g t^2$ kleiden lässt? - Dazu muss die in der Abbildung 19 gezeigte Situation auf einen irdischen Fallvorgang bezogen werden. Die Zentralmasse befindet sich in der Abbildung ganz rechts. Die gegenüberliegende Stelle - das Apogäum der Falllinie - wäre dann der Ort, an dem z.B. ein Stein aus der ruhenden Hand losgelassen wird. Dieser Ort ist von der Zentralmasse (hier die Erdmitte) die Strecke $2a$ entfernt. Das Apogäum fällt praktisch mit der Erdoberfläche zusammen, da typische Fallhöhen nicht weit darüber liegen. Die Halbachse der Falllinie ist dann $a = R/2$ (R : Erdradius). Die Fallstrecke s lässt sich demnach folgendermaßen ausdrücken:

$$s = 2a - r = 2a - a \cdot (1 - \cos E) = a \cdot (1 + \cos E)$$

Für den Apogäumsort ist die Keplergleichung zu lösen. Der an der Erdoberfläche fallende Körper fällt nur ein sehr kurzes Stück im Vergleich zur Halbachse seiner Falllinie und nur eine sehr kurze Zeit im Vergleich zur gesamten Umlaufdauer. Der Vorgang spielt sich demnach nur in unmittelbarer Umgebung des Apogäums ab, so dass $M \approx E \approx 180^\circ$ gilt. Folglich kann der in der Keplergleichung enthaltene Term für $\sin E$ um die Stelle $E = 180^\circ$ herum entwickelt und durch die ersten Glieder dieser Entwicklung sinnvoll angenähert werden:

$$\sin E \approx -E + \frac{1}{3!}E^3 - \dots \quad (\text{an der Stelle } E \approx 180^\circ)$$

Nähert man den $\sin E$ durch den ersten Term dieser Reihenentwicklung, so stellt sich die Keplergleichung wie folgt dar ($\varepsilon = 1$):

$$E - \sin E = M \quad (\text{Keplergleichung für lotrechten Fall})$$

\Rightarrow

$$E - (-E) \approx M \quad (1. \text{ Näherung an der Stelle } E = 180^\circ)$$

\Leftrightarrow

$$E \approx M / 2$$

Mit dieser Näherung für die exzentrische Anomalie geht man in die Formel für s hinein, in der noch ein Term $\cos E$ enthalten ist. Dieser Kosinus wird nun ebenfalls in eine Reihe entwickelt:

$$\cos E \approx -1 + \frac{1}{2!}E^2 - \dots \quad (\text{an der Stelle } E \approx 180^\circ)$$

Berücksichtigt man nur die ersten beiden Glieder dieser Näherung und setzt $E = M / 2$, so erhält man schließlich für s :

$$s = a \cdot (1 + \cos E) \approx a \cdot \left(1 - 1 + \frac{1}{2}E^2\right) = \frac{1}{2}a \cdot E^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}a \cdot M^2$$

Mit $M = (2\pi) \cdot t / T$ und $T^2 = (4\pi^2 \cdot a^3) / GM$ aus dem dritten Keplerschen Gesetz wird weiter umgeformt:

$$s = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}a \cdot \frac{4\pi^2 \cdot t^2}{4\pi^2 \cdot a^3} \cdot GM = \frac{1}{2} \cdot \frac{GM}{4a^2} \cdot t^2$$

Dies stimmt für $GM / R^2 = g$ (g : Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche) und $a = R/2$ tatsächlich mit der bekannten Formel $s = 1/2 g t^2$ überein, die für ein homogenes Schwerfeld an der Erdoberfläche gilt.

Der alltägliche Fall von Gegenständen auf der Erde erfolgt auf Segmenten von Keplerbahnen, deren entfernter Brennpunkt in der Erdmitte liegt. Das wurde hier für die besondere Situation des lotrechten Falls gezeigt. Die übliche Beschreibung des irdischen Falls im angenähert homogenen Schwerfeld an der Erdoberfläche lässt sich damit als Spezialfall der Keplertheorie verstehen.

9) Zur Bahnkurve von vermeintlich lotrecht auf die Erde zufallenden Körpern

In diesem abschließenden Abschnitt wird der vermeintlich lotrechte Fall aus der Sicht eines Beobachters auf der Erde analysiert. Praktisch tritt der genaue lotrechte Fall auf einer Linie ja nicht auf, denn die Erde dreht sich und gibt dem freigegebenen Körper immer eine zur lotrechten Richtung senkrecht stehende Geschwindigkeit mit. Allein an den Erdpolen, wo das Lot in Richtung der Drehachse steht, wäre ein wirklicher lotrechter Fall denkbar. In allen praktischen Fällen hat man also Ellipsen, auch wenn kein Abwurf des Körpers durch einen Werfer an der Erdoberfläche erfolgt.

Der Beobachter, der einen solchen vermeintlichen lotrechten Fall betrachtet, wird von der Erde ebenfalls mitgeführt und hat deshalb zumindest den Eindruck, der Körper falle in Bezug auf sein lokales Beobachtungssystem lotrecht. Aber auch das ist nicht ganz richtig. Es tritt eine Abweichung von der im Beobachtungssystem mitgeführten lotrechten Linie auf, die den Stein bei zunehmender Fallzeit immer weiter nach Osten führt. Diese sog. "Ostablenkung" fallender Körper wird in der Newtonschen Physik durch die Corioliskraft beschrieben, die - neben der Zentrifugalkraft - zweite Scheinkraft in rotierenden Bezugssystemen.

In der Keplerschen Sichtweise stellt sich dieses Verhalten als ganz natürliche Folge einer Fallellipse und deren Beobachtung von einem auf der Erde mitbewegten Beobachter dar, ohne dass sich dabei eine Einführung von Scheinkräften aufdrängt. Die Abbildung 20 zeigt die Situation für eine unrealistisch große Fallhöhe, die aber den Vorteil eines großen und leicht überschaubaren Ostablenkungseffektes bringt. Der Blick auf die Erde erfolgt vom himmlischen Nordpol, so dass der Äquator mit dem sichtbaren Erdrand in der Zeichenebene zusammenfällt. Lotrecht oberhalb eines Beobachters am Äquator (offener Kreis im Scheitel der Erdkugel) wird ein Körper fallen gelassen (schwarzer Punkt). Wegen der in der Abwurfhöhe aufgeprägten Geschwindigkeit fällt er auf einer Ellipse. Der von der rotierenden Erde mitgeführte Beobachter sieht den Körper, dessen Fall in der Lotrichtung begann, zwar auf sich hinabstürzen, jedoch mit einer immer größeren Abweichung nach Osten, je länger der Fall andauert.

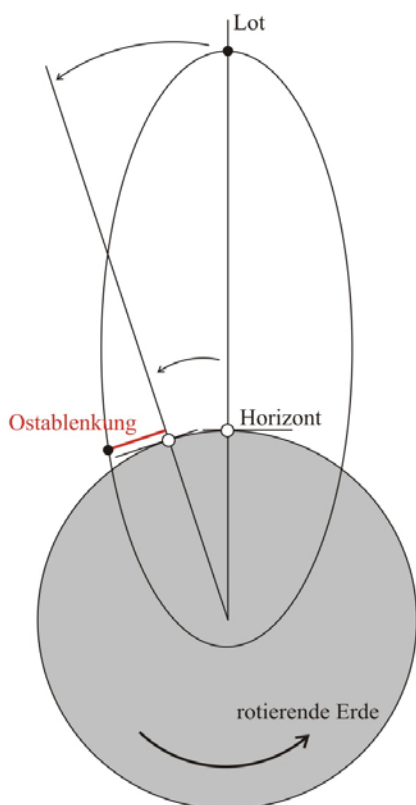


Abbildung 20: Zur Ostablenkung fallender Körper. Dargestellt ist die Fallellipse eines Körpers (schwarzer Punkt, der in einer Höhe des zweifachen Erdradius über dem Erdboden am Äquator fallen gelassen wird). Der Beobachter (offener Punkt am Erdrand) wird durch die Erde mitgeführt, aber nicht so schnell, wie sich der fallende Körper auf seiner Ellipse in Richtung Osten weiterbewegt. Deshalb nimmt der Beobachter eine Ostabweichung in seinem lokalen Bezugssystem wahr.

Bezieht man die Positionen des fallenden Körpers, die man zu jedem Zeitpunkt nach den Gesetzmäßigkeiten der Keplerbewegung erhält, auf ein Bezugssystem, das von der Erde mitgeführt wird (lotrechte Linie und Horizont an der Stelle des offenen Kreises in Abbildung 20), so lässt sich die Fallkurve mit den Ergebnissen aus der Newtontheorie vergleichen. Nach der Newtontheorie erhält man für die Ostablenkung Δ eines am Äquator fallenden Körpers (ohne Beweis):

$$\Delta = \frac{1}{3} \Omega \cdot g \cdot t^3$$

Darin ist Ω die Winkelgeschwindigkeit der Erde (eine Umdrehung in Bezug zu den Fixsternen in 86164 Sekunden), g die Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche und t die Fallzeit nach Freigabe des Körpers. Die maximale Fallzeit und damit auch die Ostablenkung beim Auftreffen auf den Erdboden erhält man aus der Fallhöhe H :

$$t_{\max} = \sqrt{2 \cdot H / g}$$

Beide Sichtweisen - die der Keplerbewegung und die der Newtontheorie bei der Verwendung von Scheinkräften - werden nun anhand der Abbildung 21 verglichen. Sie zeigt die Falllinie eines aus einer Höhe von 100 m fallenden Körpers, berechnet nach beiden Methoden.

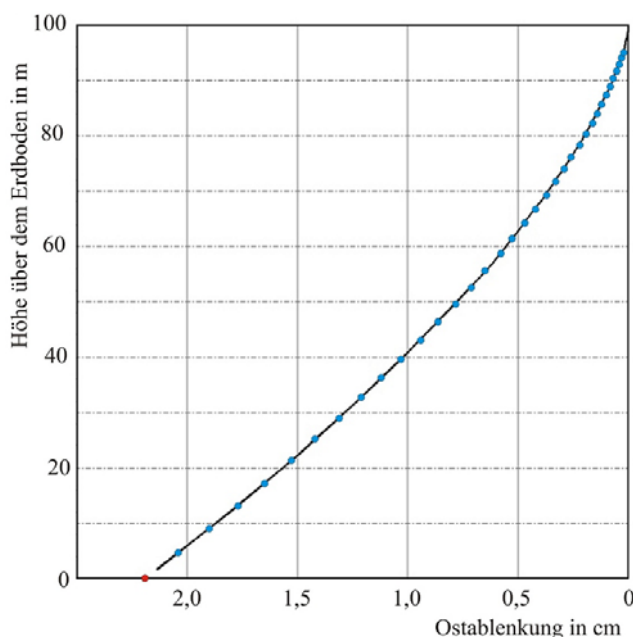


Abbildung 21: Falllinie eines Körpers, der am Äquator aus 100 Metern Höhe lotrecht fällt. Mit steigender Fallzeit nimmt die Ostablenkung zu und erreicht auf der Erdoberfläche einen Wert von 2,2 cm (roter Endpunkt). Die schwarze Linie ist mit der Keplertheorie berechnet, die blauen Punkte wurden mit der Newton-Theorie (Coriolis-Scheinkraft) gewonnen.

Die durchgezogene Linie erhält man mit der Keplerbewegung. Bei der Berechnung muss man mit der Schwierigkeit kämpfen, die Keplergleichung im Bereich des Apogäums für benachbarte Werte von M mit hoher Genauigkeit zu lösen. Praktischer und schneller ist hier die Berechnung mit den einfachen Formeln aus Newtons Theorie (einzelne Datenpunkte in Abb. 21), wenn man die Formel für die Ostablenkung Δ voraussetzt und nicht herleiten muss.

Beide Sichtweisen führen zum gleichen Ergebnis, wobei die konzeptionellen Schwierigkeiten der Newtonschen Physik, die sich in der Einführung von Scheinkräften und der umständlichen Herleitung der Formel für die Ostablenkung zeigt, wieder für eine Erklärung des Phänomens mit der Keplertheorie sprechen, die ein völlig durchsichtiges geometrisches Verständnis ermöglicht.

10) Fazit

Keplers Sichtweise des freien Falls ist wertvoll für das Verständnis sowohl der Planetenbewegung und der Raumfahrt, als auch der Fallphänomene auf der Erde. Sie verdient es, in der Lehre in Schule und Hochschule ausgiebig verwendet zu werden, insbesondere dort, wo die eher technischen und die schnelle Einsicht verstellenden Methoden des Kalküls der Newtonschen Physik ausgespart werden sollen, aber dennoch eine vollwertige und gleichwertige mathematische Beschreibung auf der Basis der Geometrie, die weitgehend zeichnerisch erfolgen kann, möglich sein soll.

11) Literatur

- E. Vogt: Elementary derivation of Kepler's laws; Am. J. Phys. 64 (4), April 1996, 392-396
L. Motz: The conservation principles and Kepler's laws of planetary motion; A. J. Phys. 43 (7), July 1975, 575-578
J. Sivardière: On the inverse Kepler problem; Eur. J. Phys. 6 (1985), 245-248
M. Reble: Keplersche Gesetze im Unterricht; Astronomie und Raumfahrt 33 (1996) 3, 16-18
S. Brach: Keplers Weg zu seinen Gesetzen; Astronomie und Raumfahrt 35 (1998) 4, 12-14
R. Baierlein: Rubber asteroid: Some orbits in introductory physics; Am. J. Phys. 62 (4), April 1994, 378-379
W.G. Rees: The sideways deflection of a falling body; Eur. J. Phys. 7 (1986) 274-277
S.B. Edgar: Planetary and satellite motion as exercises in kinematics; Eur. J. Phys. 19 (1989) 30-34
D. Topper & D.E. Vincent: An analysis of Newton's projectile diagram; Eur. J. Phys. 20 (1999) 59-66
J.E. Prussing: The mean radius in Kepler's third law; Am. J. Phys. 45(12), December 1977, 1216-1217
W. Hauser: On planetary motion; Am. J. Phys. 53 (9), September 1985, 905-907