Kegelschnitte in der Himmelsgeometrie - Teil II
Zur Berechnung von Strichspuraufnahmen

von Burkard Steinrücken, Universität Dortmund

Das in Teil I des Aufsatzes beschriebene Verfahren läßt sich auch zur Berechnung von Sternbahnen verwenden, wie sie z.B. bei Strichspuraufnahmen gewonnen werden können. Damit eröffnet sich ein Zugang zur Positionsastronomie mit der Kleinbildkamera, dessen Genauigkeit bei wenigen Bogenminuten liegt. Diese einfache Methode ermöglicht somit das Studium der Refraktions- und Parallaxeneffekte (beim Mond) auf die Gestirnsposition.

Sternbahnen auf einer langzeitbelichteten Fotografie

Nicht nur der tägliche Schattenlauf erzeugt Kegelschnittkurven, sondern auch Sterne, die bei Langzeitbelichtung mit einer Kamera als Strichspuren auf der Filmebene abgebildet werden. Die Gleichungen der Kegelschnittkurven können deshalb auch bei der Analyse von Strichspuraufnahmen Anwendung finden und eröffnen damit die Möglichkeit zur Positionsastronomie mit der Kleinbildkamera.

Die bedeutungstragenden Elemente im Fall der horizontalen Datumssonnenuhr sind zunächst in den neuen Bedeutungsbereich zu übertragen. Die optische Achse der Kamera, die wir uns der Einfachheit halber auch als Lochkamera vorstellen können, stellt hier die Richtung dar, in die der Obelisk deutet. Das Eintrittsloch übernimmt die Rolle der Obeliskenspitze als Projektionszentrum. Die Filmebene entspricht der Horizontalebene der Sonnenuhr.
Die Abbildung II/1 macht diese Entsprechungen deutlich. Durch ein Verkippen der Kamera gegen die Horizontalebene kann eine Veränderung der geografischen Breite simuliert werden. Zur Angabe der relativen Orientierung von Filmebene und Polachse ist die geografische Breite nun ohne Bedeutung. Stattdessen ist die Deklination δ_0 von Interesse, auf die die optische Achse deutet. Im Falle des Obelisken ist das der Zenitpunkt mit einer Deklination von $\delta_0 = \phi$. Aber auch ein weiteres Schwenken der Kamera, z.B. um die Polachse der Erde ist möglich, mit der Folge, dass die optische Achse nun nicht mehr auf einen Punkt des Meridians deutet. Man erhält Aufnahmen, wie sie ein Beobachter auf einem anderen Längengrad bei Betrachtung seines Ortsmeridians erhält, wenn die Kamera im Stundenwinkel t um einen Wert verdreht wird, der der Längendifferenz der zwei Beobachtungsorte entspricht.
Beide Aufnahmen führen auf gleiche Bahnformen und Orientierungen der Strichspuren auf der Filmebene, wenn die Bildebene beim Schwenk so gerichtet ist, das ihre kartesischen Koordinatenachsen parallel zu den Deklinations- und Stundenkreisen verlaufen.
Im allgemeinen wird sich ein Fotograf und auch ein „Strichspurfotograf" aber an seinem Horizontsystem ausrichten und die Bildebene parallel zur Horizontlinie einstellen (Abb. II/2). Eine Strichspuraufnahme, deren optische Achse, d.h. deren Bildmitte die Horizontalkoordinaten (h_0, a_0), bzw. die Äquatorialkoordinaten (δ_0, t_0) besitzt, wird das gleiche Geschehen abbilden, unabhängig davon, ob die Kamera parallel zu den Höhenkreisen oder zu den Deklinationskreisen ausgerichtet ist. Im zweiten Fall zeigt die Aufnahme allerdings die für die Datumssonnenuhr bekannt Symmetrie der Bahnen bezüglich der x-Achse - des projizierten Stundenkreises. Im ersten Fall sind die Kegelschnittkurven, die sich immer symmetrisch um den Stundenkreis der Bildmitte gruppieren, gegen den Vertikalkreis der Bildmitte um den parallaktischen Winkel ρ verdreht. Rotationszentrum ist der Bildmittelpunkt (Abb. II/3).

Für die Berechnung des parallaktischen Winkels ρ sind zunächst einige Betrachtungen aus der sphärischen Geometrie nötig. Der Bildmittelpunkt F - er entspricht dem Fußpunkt des Obelisken - bildet mit dem Zenit und dem Himmelspol ein sphärisches Dreieck, das ausschließlich aus Großkreissegmenten besteht (Abb. II/2). Für ein solches Dreieck gilt der Sinussatz der sphärischen Geometrie, welches die Innenwinkel A, B, C und die Seiten a, b, c in Beziehung setzt:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

Setzt man die Kenntnis der Horizontalkoordinaten von *F* und die geografische Breite ϕ voraus, sind genügend Winkel und Seiten bekannt, um auch die übrigen mit Hilfe des Sinussatzes zu ermitteln. Die Seite zwischen Zenit und Himmelspol hat die Länge (90° -ϕ) , der Winkel zwischen dem Stundenkreis von F und dem nördlichen Segment des Meridians beträgt ($a_{Süd}$ - 180°) = a_{Nord}. Die Länge des Großkreissegments zwischen F und dem Himmelspol ist (90° - δ_0). Mithin gilt:

$$\sin\rho = \frac{\sin(90° - \phi)\cdot\sin(180° - a_{Süd})}{\sin(90° - \delta_0)} = \frac{\sin a_{Nord}\cdot\cos\phi}{\cos\delta_0}$$

Für die Berechnung von δ_0 aus den Horizontalkoordinaten (h_0, a_0) liefert die sphärische Geometrie:

$$\sin\delta_0 = \sin h_0\cdot\sin\phi - \cos a_0\cdot\cos h_0\cdot\cos\phi$$

Zur Darstellung der Strichspuren im kartesischen $x'y'$-Koordinatensystem der Bildebene wird die bezüglich des Stundenkreises von F symmetrische Situation um ρ gedreht (Abb. II/3):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\rho & \sin\rho \\ -\sin\rho & \cos\rho \end{pmatrix}}_{Rotationsmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x' = x\cdot\cos\rho + y\cdot\sin\rho$$
$$y' = -x\cdot\sin\rho + y\cdot\cos\rho$$

Diese transformierten Koordinaten setzt man nun in die Hyperbelgleichung ein, deren Parameter *a*, *b*, und x_M (Verschiebung des Symmetriepunktes *M* der Hyperbel gegen den Fußpunkt F) nach analogem Muster wie bei der Datumssonnenuhr berechnet wurden (mit $\phi = \delta_0$). (Für Parabeln, Kreise und Ellipsen ist das Vorgehen analog.)

Die Hyperbelgleichung im kartesischen *xy*-Koordinatensystem, wenn die Achsen in Richtung des Stunden- und Deklinationskreises der Bildmitte verlaufen, lautet nun:

$$\frac{(x - x_M)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Die Hyperbelgleichung im verdrehten $x'y'$-Koordinatensystem, mit den Achsen in Richtung des Vertikal- und Höhenkreises von F, lautet dagegen:

$$\frac{(x\cdot\cos\rho + y\cdot\sin\rho - x_M)^2}{a^2} - \frac{(-x\cdot\sin\rho + y\cdot\cos\rho)^2}{b^2} = 1$$

Mit diesen Beziehungen lassen sich nun Sternbahnen bzw. Strichspuren auf einer langzeitbelichteten Fotografie berechnen. Die Abbildung II/4 zeigt das Ergebnis beim Blick in die vier Haupthimmelsrichtungen. Dargestellt sind hypothetische Aufnahmen mit der Kleinbildkamera und einer Objektivbrennweite von ca. 35 mm. Bei Verwendung eines solchen Weitwinkelobjektives läßt sich der Azimuthbereich der auf - oder untergehenden Sonne vom Sommersonnen- bis zum Wintersonnenwendepunkt komplett erfassen, wie die oberen zwei Darstellungen zeigen. Die optische Achse der Kamera deutet bei diesen Bildern auf den Ost- bzw. Westpunkt in einer Höhe von 0°. Die unteren zwei Darstellungen der Abbildung II/4 sind im Hochformat berechnet. Die Kameraachse deutet nun in Richtung Süden (linkes Bild) bzw. Norden (rechtes Bild) bei einem Höhenwinkel von jeweils 30°. Bei der „Südaufnahme“ sind wieder die sieben relevanten Sonnedeklinationen beim Eintritt der Sonne in ein neues Tierkreiszeichen dargestellt. Die „Nordaufnahme“ zeigt Spuren von Sternen der Deklination 40°, 55°, 70° und 85°. Sonnenbahnen sind auf diesem Bild nicht zu finden, da die Sonne bei einer geografischen Breite von 51,5° niemals oberhalb des Nordhorizontes zu sehen ist.

Fazit

Die Kegelschnitte lassen sich auch in der klassischen Positionsastronomie anwenden, um Sternbahnen oder Schattenkurven zu berechnen, wie sie bei der Zentralprojektion der Himmelskoordinaten auf eine Ebene auftreten.
Die in der Astronomiedidaktik beliebte Methode der Strichspuraufnahme erhält damit durch die Kegelschnittmethode ein mathematisches Fundament. Sind die Koordinaten des Bildmittelpunktes bei einer Strichspuraufnahme genau bekannt (indem man z.B. die Kameramitte auf ein bekanntes Landschaftsmal richtet, dessen Koordinaten aus einer topographischen Karte gewonnen werden können), eröffnet sich die Möglichkeit der bogenminutengenauen Positionsastronomie mit der Kleinbildkamera.
Aus den Abweichungen der fotografierten Spuren zu den aus Kegelschnitten berechneten Gestirnsbahnen lassen sich sogar die richtungsverändernden Effekte wie Refraktion oder Mondparallaxe studieren.

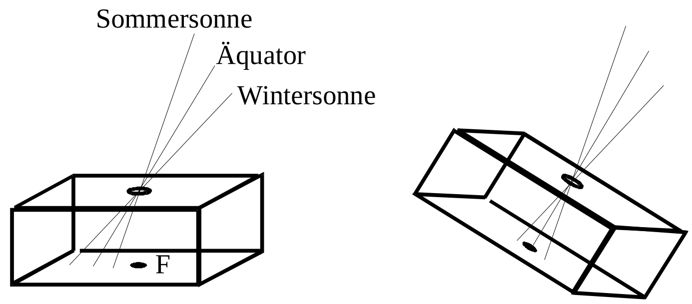

Abbildung II/1

Astronomische Koordinaten der Kameraachse

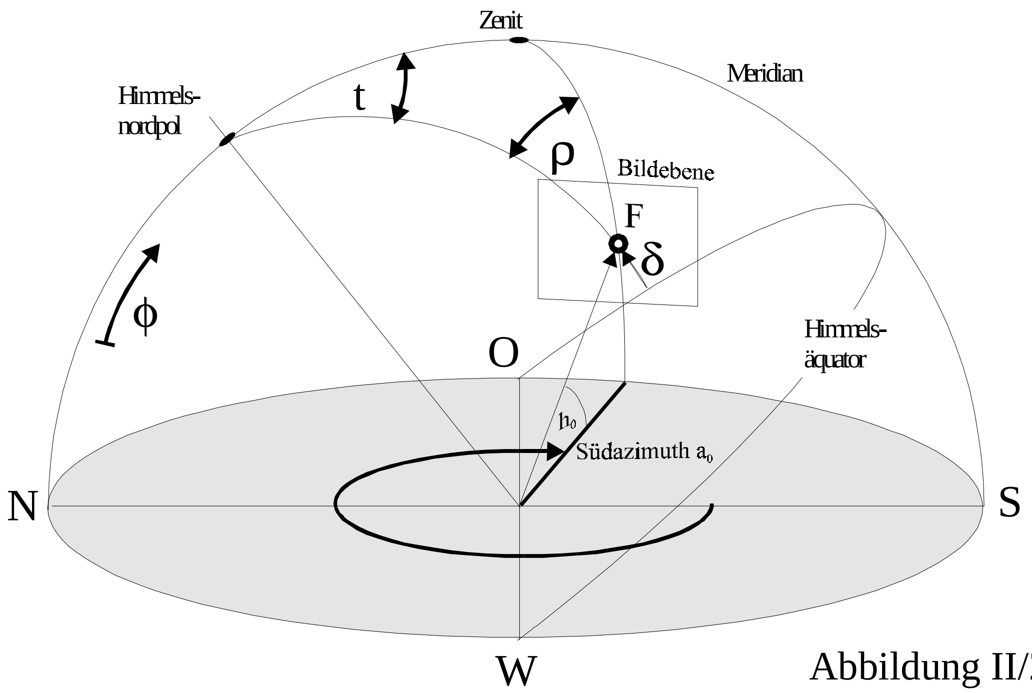

Abbildung II/2

Kartesische Koordinaten der Bildebene

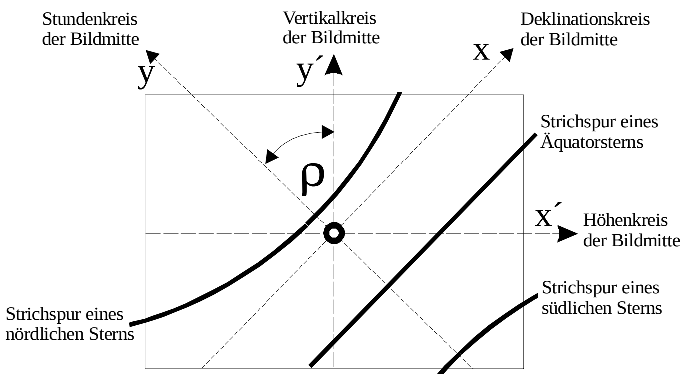

Abbildung II/3

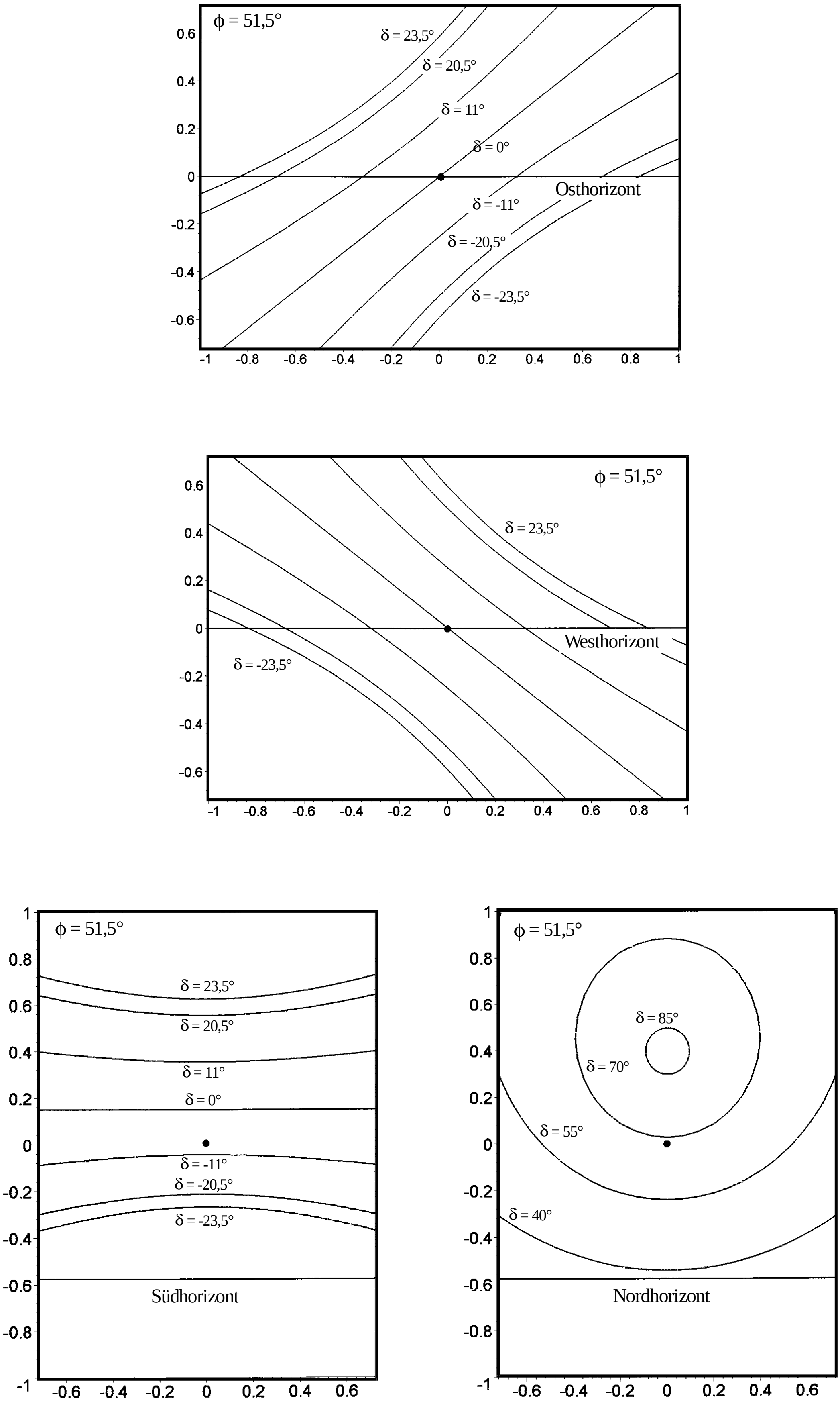

Abbildung II/4