

Kegelschnitte in der Himmelsgeometrie

Zur Berechnung von Datumslinien auf Horizontalsonnenuhren

von Burkard Steinrücken, Universität Dortmund

Nicht nur die Bahnen der Himmelskörper im Planetensystem werden durch die Kegelschnittkurven *Ellipse*, *Kreis*, *Parabel* und *Hyperbel* beschrieben, sondern auch die täglichen Spuren eines im Sonnenlicht schattenwerfenden Körpers, wenn die Fläche, auf die der Schatten fällt, eben ist. Je nach geografischer Lage auf der Erdkugel oder Orientierung der Aufzeichnungsebene stellen sich wieder Hyperbeln, Ellipsen oder Kreise ein, deren geometrische Gestalt sich auch ohne die Kenntnis der sphärischen Himmelsgeometrie berechnen läßt, wenn man die von den Kegelschnitten bekannte projektive Geometrie anwendet.

Einführung

Ein Schnitt durch einen Kegel, der senkrecht zur Kegelachse erfolgt (Schnittwinkel 90°), ergibt eine kreisförmig begrenzte Schnittebene (Abb. 1). Wird schräg in den Kegel hineingeschnitten, erhält man eine elliptische Begrenzung, wenn der Schnittwinkel größer ist als der Öffnungswinkel des Kegels. Entspricht der Schnittwinkel dem Öffnungswinkel genau, so wird die Schnittebene nicht mehr durch eine geschlossene Kurve begrenzt. Die Grenzlinie der Ebene folgt nun dem Verlauf einer Parabel und wird zur Hyperbel, wenn der Schnittwinkel den Öffnungswinkel übersteigt.

Auch bei Horizontalsonnenuhren findet man diese Kurven wieder, und zwar in Form von Datumslinien, die vom Schatten, den die Spitze des Schattenstabes (oder eine besonders markierte Stelle auf dem Schattenstab) auf das ebene Zifferblatt wirft, an verschiedenen Tagen im Jahr überstrichen wird (Abb. 2).

Der abstrakte Himmelskegel und seine Lage im Raum

Wenn sich die Kegelschnitte Ellipse, Kreis, Hyperbel und Parabel auf den Zifferblättern der Sonnenuhren in aller Welt zeigen, so muß die Mathematik des Kegelschnittes in den Bewegungen der Himmelskörper verborgen sein. Wo aber ist der Kegel, und in welcher Ebene wird geschnitten?

Die zweite Frage ist schnell beantwortet: Schnittebene ist die Fläche, in der sich die Kurvenform eines Kegelschnittes zeigt, in diesem Fall also das horizontale Zifferblatt der Sonnenuhr. Die Zifferblattebene ist die Basis für alle dargestellten Datumslinien in diesem Artikel. Wenn aber verschiedene Kegelschnittlinien darauf gezeichnet sind, so ist für jede Linie ein eigener Kegel zu finden, der sowohl in seinem Öffnungswinkel als auch in seiner Lage relativ zur Schnittfläche zu diskutieren ist.

Die Antwort der ersten Frage bereitet größere Schwierigkeiten: Der Kegel, welcher hier geschnitten wird, ist von abstrakter Natur und somit der sinnlichen Wahrnehmung entzogen. Die beim Kegel immer vorhandene Rotationssymmetrie bezüglich der Kegelachse läßt den Schluß zu, dass die Achse des „Himmelskegels“ die Polachse der Erde ist. Um sie erfolgt die tägliche Drehung der Gestirne. Dann ist die zur Kegelachse senkrechte Ebene die Äquatorebene der Erde, die in ihrer Erweiterung zur Himmelskugel hinauf auch die Ebene des Himmelsäquators genannt wird.

Die Spitze des Kegels ist durch den Schattenwerfer gegeben, für den die Datumslinien berechnet werden sollen, also z.B. die Spitze eines Obelisken, wie wir in den Berechnungen dieses Artikels immer voraussetzen wollen.

Der Öffnungswinkel des Kegels kann mit Hilfe des Winkelabstandes, den die Sonne zum Himmelsäquator aufweist, berechnet werden. Den Winkelabstand zum Himmelsäquator nennt man in der Astronomie Deklination δ . Peilt man über die Spitze eines Obeliskens zur Mittagszeit zunächst den Himmelsäquator und dann die im Süden stehende Sonne an, so finden wir die Sonnendeklination als kürzeste Winkeldistanz zwischen den zwei Peilpunkten auf dem Meridian, der vom Südpunkt senkrecht aufsteigt und Himmelsmitte (Zenit), Himmelspol und Nordpunkt auf geradem Weg verbindet (Abb. 3).

Die Kombination himmlischer Elemente wie Polachse, Himmelsäquator und anvisiertes Gestirn mit dem Beobachtungselement (Obelisk, Schattenstab einer Sonnenuhr oder Kamera) macht den Reiz der himmlischen Kegelgeometrie aus. Sie führt uns vor Augen, dass wir auch in der astronomischen Wissenschaft in Beziehung zum Meßgegenstand stehen und unsere eigene Position oder Meßanordnung mit einbeziehen müssen in die Untersuchung des Geschehens.

Sonnenuhren in mittleren geographischen Breiten enthalten nur hyperbelförmige Datumslinien. Erst jenseits der Polarkreise stellen sich geschlossene Linien - Ellipsen und Kreise - ein, da die Sonne in jenen Regionen der Erde Zirkumpolarstern sein kann, und dann in ihrer Nordlage einen südweisenden Schatten erzeugt, was in Mitteleuropa niemals zu beobachten ist. Offensichtlich spielt die geographische Breite ϕ des Beobachtungsortes eine wichtige Rolle bei den Datumslinien. Auch sie muß in der Geometrie des Kegelschnitts berücksichtigt sein.

Den Himmelskegel erhält man, wenn die Verbindungslinie zwischen Obelisk und Sonne, längs der das Sonnenlicht zur Beobachtungsposition einfällt, durch die tägliche Drehung um die Polachse läuft. Auf diese Weise wird im Tagesverlauf die Kegelmantelfläche beschrieben. Die möglichen „Sonnenkegel“ sind alle sehr stumpf, denn wegen der geringen Maximaldeklination der Sonne ist der kleinste Öffnungswinkel $90^\circ - 23,44^\circ = 66,56^\circ$.

Die dreidimensionalen Verhältnisse dieser Kegelgeometrie über dem lokalen Horizont lassen sich nicht gut zeichnerisch darstellen. Schneidet man aber durch den Meridian, so erhält man die in Abbildung 4 gezeigten einfacheren zweidimensionalen Verhältnisse.

Nun wird deutlich, dass der in der Spitze des Obeliskens gelagerte Himmelskegel mit der Ebene des Zifferblattes geschnitten wird, und dass Sonnenkegel bei anderen Deklinationen und damit anderen Öffnungswinkeln zwar ebenfalls an der Spitze des Obeliskens ansetzen, jedoch unter verändertem Schnittwinkel in die Zifferblattebene schneiden und andere Kurvenverläufe hervorrufen.

Zur anschaulichen Erklärung der beobachtbaren Datumslinien kann eine Analogie aus der Schreinerwerkstatt herangezogen werden. Eine Kreissäge - sie steht für den Himmelsäquator - erzeugt auch einen geraden Schnitt in einem Brett - es steht für die Zifferblattebene - wenn sie schräg hineinschneidet (vgl. mit der Abb. 4). Wird das Sägeblatt gegen einen konischen Fräser ausgetauscht - er stellt den Himmelskegel dar -, so erzeugt dieser auf dem Brett eine Schnittkante mit hyperbolischem Verlauf, wenn er nur in genügend schräger Lage herabgesenkt wird. Wird der konische Fräskopf zunehmend in die Senkrechte gestellt, was einer Verlagerung des Beobachtungsortes in Richtung Nordpol entspricht, so werden elliptische und zuletzt kreisförmige Fräskanten erstellt.

Analytische Berechnung der Bahnparameter eines Kegelschnitts

Zur Berechnung der Datumslinien ist die Einführung eines Koordinatensystems erforderlich, welches den Kurvenverlauf auf dem Zifferblatt zu beschreiben gestattet. Die Projektion des Meridians auf die Zifferblattebene sei die x -Achse eines kartesischen Koordinatensystems.

Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel lassen sich in diesem System folgendermaßen darstellen. Die Größen r , a , b und p bezeichnen den Kreisdurchmesser, die große und kleine Halbachse der Hyperbel bzw. Ellipse und den Halbparameter der Parabel bei der Konstruktion nach der Leitlinieneigenschaft (dazu später mehr).

$$\text{Kreis: } x^2 + y^2 = r^2$$

$$\text{Ellipse: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{Hyperbel: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{Parabel: } y^2 = 2p \cdot x$$

Wir beschränken uns zunächst auf die Berechnung einer Datumssonnenuhr in mittleren geographischen Breiten, wo nur Hyperbeln auftreten. Die Gestalt der Hyperbeln auf dem Zifferblatt ist eindeutig bestimmt, wenn die große Halbachse a und die kleine Halbachse b bekannt sind. Diese beiden Parameter bestimmen die Form beider Datumslinien, sowohl für die positive (im Sommer-) als auch negative Deklination (im Winterhalbjahr).

Die Hyperbeläste schmiegen sich asymptotisch an die geraden Linien mit den Gleichungen $x = \pm \frac{b}{a} \cdot y$ an, welche durch den Symmetriepunkt der Hyperbelschar laufen.

Die Symmetrie gilt bezüglich des Ursprungs des xy -Systems (siehe Abb. 4). Das $x'y'$ -Koordinatenkreuz setzt dagegen am Fußpunkt des Obeliskens an. Die y' -Achse ist gegenüber der y -Achse um einen Wert x_M verschoben. Dieser Wert ist für jede Sonnendeklination neu zu bestimmen. Die Abstände der Scheitelpunkte vom Fußpunkt F (Ursprung des $x'y'$ -Systems zum Symmetriepunkt M) lauten x_{S1} (Winterhalbjahrhyperbel) und x_{S2} (Sommerhalbjahrhyperbel). Die Scheitelpunkte der beiden Hyperbeläste sind vom Ursprung des ungestrichenen Systems um den Betrag von a (die große Halbachse) entfernt. Somit gilt beim Übergang vom gestrichenen zum ungestrichenen System:

$$x_{S1} = x_M + a, \quad x_{S2} = x_M - a$$

Die kleine Halbachse b läßt sich u.a. aus dem Abstand der Brennpunkte F_1 und F_2 der Hyperbeläste zum Symmetriepunkt M ermitteln. Diese Strecke wird lineare Exzentrizität e genannt. Sie berechnet sich zu:

$$\overline{MF_1} = \overline{MF_2} = e = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Damit wird die gesuchte kleine Halbachse zu $b = \sqrt{e^2 - a^2}$.

Die genaue Gestalt und Lage der zwei Datumslinien läßt sich nun vollständig aus der Analyse des Meridianschnitts gewinnen (sehr bemerkenswert!), wenn es gelingt, außer den Abständen des Symmetriepunktes M und der Scheitelpunkte S_1 , S_2 zum Fußpunkt F des Obeliskens auch die Abstände der Brennpunkte F_1 und F_2 zu F zu ermitteln.

Die Lage der Brennpunkte wird durch eine trickreiche Konstruktion festgelegt, die auf G. Pierre Dandelin zurückgeht und in [1] ausführlich beschrieben wird. Nach Dandelin paßt man zwei Kugeln in den Deklinationsdoppelkegel ein, die sowohl die Kegelmantelfläche als auch die Schnittebene berühren. Die Berührungspunkte der Dandelin'schen Kugeln mit der Schnittebene (dem Zifferblatt der Sonnenuhr) sind die gesuchten Brennpunkte.

Im Meridianschnitt tauchen die Dandelin'schen Kugeln als zwei Kreise unterschiedlicher Größe auf (siehe Abb. 5). Die große Kugel führt auf den Brennpunkt der Winterhyperbel, die kleine Kugel auf den Brennpunkt der Sommerhyperbel.

Da der Winter- und der Sommerhyperbelast aber symmetrisch zum Mittelpunkt M sind, genügt die Berechnung der Lage nur eines Brennpunktes auf der x' -Achse zur Bestimmung der kleinen Halbachse b für beide Hyperbeläste.

Die zu bestimmenden Größen längs der x -Achse (der Projektion des Meridians auf die Zifferblattebene) sind in der Abbildung 4 aufgelistet. Die Höhe h des Obeliskens bzw. der kürzeste Abstand des Schattenwerfers zur Zifferblattebene wurde zu 1 gesetzt. Bei der Anfertigung einer horizontalen Datumsonnenuhr beliebiger Größe muß entsprechend dem Verhältnis der wirklichen Höhe zu $h = 1$ jedes lineare Maß des Zifferblattes skaliert werden. Einige der zu berechnenden Abstände lassen sich nach dem Studium der Abbildung nun rasch aufschreiben:

$$x_M = \frac{1}{2} \cdot \tan(\phi + \delta) + \frac{1}{2} \cdot \tan(\phi - \delta)$$

$$a = \frac{1}{2} \cdot \tan(\phi + \delta) - \frac{1}{2} \cdot \tan(\phi - \delta)$$

$$x_{S1} = x_M + a = \tan(\phi + \delta)$$

$$x_{S1} = x_M - a = \tan(\phi - \delta)$$

Die Lage der Äquinoktiallinie, die von der Schattenspitze überstrichen wird, wenn die Sonne auf dem Himmelsäquator steht, (Abstand von F zu \ddot{A}) berechnet sich zu:

$$x_{\ddot{A}} = \tan \phi$$

Ebenfalls möglich, wenn auch ungleich umständlicher, ist die Berechnung der kleinen Halbachse b aus dem Meridianschnitt. Durch eine astronomische Überlegung, die weitere Einsichten in die Symmetrie des Sonnenlaufs ermöglicht, läßt sich die kleine Halbachse b aber auch auf einem anderem Weg ermitteln. Diesen Weg wollen wir hier beschreiben.

Die Abbildung 6 verdeutlicht das Prinzip einer astronomischen Koordinatenmessung mittels eines schattenwerfenden Obeliskens. Aus der Länge des Schattens läßt sich die Winkelhöhe der Sonne berechnen. Die Himmelsrichtung, aus der die Sonne scheint, wird Azimuth genannt. Gebräuchlich ist die Zählung des Azimuthes ausgehend von Süd über West nach Nord und Ost. Der Schatten zeigt immer in die Gegenrichtung, und somit läßt sich aus seinem Azimuth sogleich das Sonnenazimuth durch Addition von 180° ermitteln. Damit entspricht das Schattenazimuth dem Nordazimuth der Sonne, welches von Nord beginnend über Ost und Süd nach West gezählt wird.

Steht die Sonne (mit Deklination $+\delta$) während ihres Auf- oder Unterganges auf dem Horizont, so deutet der Schatten in jene Richtung, in der die Sonne unter- bzw. aufgeht, wenn sie einen Deklinationwert von $-\delta$ innehat. Für die extremalen Sonnendeklinationen zum Zeitpunkt der Sommer- oder Wintersonnenwende gilt insbesondere folgendes. Die am Sommersonnenwendtag aufgehende Sonne wirft einen Schatten in Richtung ihres Untergangspunktes am Tag der Wintersonnenwende und umgekehrt (Abb. 7).

Diese wundervolle Symmetrie zwischen den Auf- und Untergangspunkten der Sonne an Tagen betragsmäßig gleicher aber vorzeichenvertauschter Deklination, die vermutlich schon die Erbauer von Stonehenge zu dem architektonischen Grundmuster der weltberühmten Steinzeitanlage im Süden Englands inspiriert hat, wird durch die Strahlenbrechung, die das Sonnenlicht auf dem Weg durch die irdische Atmosphäre erleidet, ein wenig gestört. Alle Auf- oder Untergangspunkte werden durch diesen Effekt um ca. $0,5^\circ$ bis 1° nach Norden verlagert. Im folgenden sei dieser Effekt aber vernachlässigt.

Die Symmetrie der extremalen Auf- und Untergangszimuthe findet ihre Entsprechung in den gleichgeformten Hyperbelästen für das Sommer- und Winterhalbjahr. Die Auf- und Untergangszimuthe der Sonne pendeln im Jahreslauf zwischen den Extrempunkten der Sonnenwenden hin und her. Für den Schatten des Obeliskens sind diese Extrema ebenfalls maßgeblich. Nie kann z.B. der Schatten der aufgehenden Wintersonne mit $\delta = -23,44^\circ$ die extremale Azimutrichtung der untergehenden Sommersonne mit $\delta = +23,44^\circ$ nach Westen

überschreiten. An diesem Tag fällt das Schattenazimuth bei Sonnenaufgang mit dem Aufgangsazimut der Wintersonne plus 180° bzw. dem Untergangsazimuth der Sommersonne zusammen; dieses Schattenazimuth deutet in Richtung der Asymptote, an die sich die tägliche Schattenhyperbel in den Morgen- bzw. Abendstunden anschmiegt. Mithin kann aus den extremalen Azimuthen die Lage der Asymptote ermittelt werden. Da die Steigung der Asymptote im kartesischen xy -System durch den Quotienten der zwei Halbachsen a und b gegeben ist, können wir die gesuchte kleine Halbachse b auch aus der Beobachtung der auf- oder untergehenden Sonne im Horizont gewinnen (z.B. mit ausreichender Genauigkeit mit einem Peilkompaß).

Die Auf- oder Untergangsazimuthe der Sonne bei allen möglichen Sonnendeklinationen zwischen $+23,44^\circ$ und $-23,44^\circ$ lassen sich mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie leicht berechnen, wenn auch die geografische Breite des Beobachtungsstandortes bekannt ist. Auf eine Herleitung dieser Formel sei hier verzichtet, wie verweisen dazu auf die astronomische und astronomiedidaktische Literatur [2,3] und zitieren hier nur ($a_{Süd}$ ist das Südazimuth):

$$\cos a_{Süd} = -\frac{\sin \delta}{\cos \phi}$$

Der Schatten weist in die Gegenrichtung. Man erhält für das Schattenazimuth, welches dem Nordazimuth der Sonne gleicht:

$$\cos a_{Nord} = \frac{\sin \delta}{\cos \phi}$$

Das Nordazimuth der Hyperbelasymptote ist in Abbildung 7 mit eingezeichnet. Es entspricht dem Steigungswinkel der Asymptote, gemessen von der x -Achse. Der Tangens dieses Steigungswinkels ist durch den Quotienten der Hyperbelhalbachsen zu b/a gegeben:

$$\tan a_{Nord} = \frac{b}{a} = \frac{\sin a_{Nord}}{\cos a_{Nord}}$$

Mit $\sin a_{Nord} = \sqrt{1 - \cos^2 a_{Nord}}$ und dem $\cos a_{Nord}$ aus der sphärischen Trigonometrie erhält man schließlich:

$$b = a \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos^2 a_{Nord}}{\cos^2 a_{Nord}}} = a \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos^2 a_{Nord}} - 1} = a \cdot \sqrt{\frac{\cos^2 \phi}{\sin^2 \delta} - 1}$$

Zusammenstellung der Ergebnisse: Datumslinien auf horizontalen Sonnenuhren

Für den Abstand x_M des Hyperbelsymmetriepunktes M zum Fußpunkt F des Obeliskens, die große Halbachse a , die Scheitelpunktsabstände x_{S1} und x_{S2} , den Abstand der Äquinoktiallinie $x_{\bar{A}}$ zum Fußpunkt und die kleine Halbachse b gelten folgende Formeln:

$x_M = \frac{1}{2} \cdot \tan(\phi + \delta) + \frac{1}{2} \cdot \tan(\phi - \delta)$ $a = \frac{1}{2} \cdot \tan(\phi + \delta) - \frac{1}{2} \cdot \tan(\phi - \delta)$ $x_{S1} = x_M + a = \tan(\phi + \delta)$ $x_{S2} = x_M - a = \tan(\phi - \delta)$ $b = a \cdot \sqrt{\frac{\cos^2 \phi}{\sin^2 \delta} - 1}$ $x_{\bar{A}} = \tan \phi$
--

Bei bekannter geografischer Breite und ausgewählten Werten für die Sonnendeklination lassen sich die Datumslinien für eine Sonnenuhr auf einem Schulhof in mittleren geografischen Breiten damit schnell berechnen. Man beginnt mit der Bestimmung der jeweiligen Abstände zum Fußpunkt des Obeliskens und zeichnet, ansetzend am Punkt M (Abb. 4), die Asymptoten. Wird keine hohe Genauigkeit angestrebt, so führt das freihändige Zeichnen der durch den Scheitelpunkt verlaufenden und sich an die Asymptoten anschmiegender Hyperbeläste bereits zu befriedigenden Ergebnissen. Genauere xy - bzw. $x'y'$ -Wertepaare für die Hyperbeläste kann man schnell mit dem Taschenrechner berechnen.

Bei der Auswahl der Deklinationswerte beschränkt man sich aus Gründen der Übersichtlichkeit oft auf die Sonnenwenden und die Tag-Nacht-Gleichen. Dies führt zu drei Datums- bzw. Deklinationslinien auf dem Zifferblatt (Abb. 2). Man findet aber auch Datumssonnenuhren mit sieben Linien, die zu den Deklinationswerten gehören, die die Sonne bei Eintritt in ein neues Tierkreiszeichen aufweist. Da das Sommer- und das Winterhalbjahr wegen der ungleichförmigen Bewegung der Erde auf der Keplerellipse ungleich lang sind, die Monatslänge variabel ist und überdies wegen der Kalenderschaltungen Unregelmäßigkeiten bei der Verteilung der Deklinationswerte auf die Kalenderdaten auftreten, fallen die Tage der Sonneneintritte in die Tierkreiszeichen nicht in jedem Jahr auf den gleichen Tag im Monat. Die folgende Wahl der Deklinationen und Kalendertage stellt einen möglichen Ausgleich dar; nimmt man die Werte als stets gültig an, so liegt der Fehler aufgrund dieser Annahme bei $0,5^\circ$ bis 1° .

Eintritt der Sonne in das Zeichen	etwaiges Kalenderdatum	etwaige Deklination
Widder (Tag-Nacht-Gleiche)	21. März	0°
Stier	21. April	$+12^\circ$
Zwillinge	21. Mai	$+20,5^\circ$
Krebs (Sonnenwende)	21. Juni	$+23,5^\circ$
Löwe	21. Juli	$+20,5^\circ$
Jungfrau	21. August	$+12^\circ$
Waage (Tag-Nacht-Gleiche)	23. September	0°
Skorpion	21. Oktober	$-10,5^\circ$
Schütze	21. November	-20°
Steinbock (Sonnenwende)	21. Dezember	$-23,5^\circ$
Wassermann	21. Januar	-20°
Fische	21. Februar	$-10,5^\circ$

Parabeln, Ellipsen und Kreise

In mittleren Breiten und in den Tropenregionen stellen sich zu allen möglichen Sonnendeklinationen immer Schattenhyperbeln ein. Sonderfälle treten am tropischen Wendekreis und am Äquator auf. Die Datumslinien für eine Horizontaluhr am Äquator sind nicht nur symmetrisch bezüglich M , sondern auch bezüglich des Fußpunktes F , denn M und F fallen bei der geografischen Breite $\phi = 0$ zusammen. Am Wendekreis des Krebses bei $\phi = 23,44^\circ$ kommt es am Tag der Sommersonnenwende zum Zenitstand der Sonne und der Scheitelpunkt F der Sommerhyperbel fällt mit dem Fußpunkt F zusammen. Für einen Moment im Jahr wirft der Obelisk keinen Schatten.

In den Polarregionen der Erde kommen auch die anderen Kegelschnittkurven zum Zug. Der nördliche Polarkreis mit $\phi = (90^\circ - 23,44^\circ)$ ist die Grenzbreite zwischen den uns geläufigen Sonnenbahnen mit Auf- und Untergangsphänomen und einer möglichen Oberläufigkeit der Sonne, wenn das Tagesgestirn den Horizont nicht mehr unterschreitet.

Die Datumslinie der Sommersonne mit $\delta = 23,44^\circ$ ist am Polarkreis keine Hyperbel mehr aber auch noch keine geschlossene Linie, weil die Sonne im Nordpunkt im Horizont steht und einen unendlich langen Schatten wirft. Die Datumslinie wird nun zur Parabel. Beim Berechnungsversuch nach dem obigen Formelsystem zeigt sich dies an der Unendlichkeitsstelle, die bei Auswertung der Tangensfunktion in den Formeln für die Halbachse a und den Abstand x_M auftritt. Das Formelsystem versagt mithin in diesem Fall. Eine Parabellinie kann aber unter Verwendung der Leitlinieneigenschaft konstruiert werden.

Die Parabel ist die Menge aller Punkte P , die sowohl zum Fokus F_1 als auch zur Leitlinie L den gleichen Abstand haben, wobei letztere Strecke immer senkrecht auf der Leitlinie stehen muß (Abb. 8 unten). Stehen die Verbindungslinien von P zu F_1 bzw. zur Leitlinie senkrecht aufeinander, so haben sie die Länge p . Diese Strecke wird Halbparameter genannt, denn ihr Zweifaches, angelegt am Fokus F und senkrecht zur x -Achse verlaufend, erreicht gerade den Parabelbogen zu beiden Seiten. Auch die Leitlinie befindet sich von F_1 im Abstand p entfernt, jedoch parallel zur y -Achse. Der Fokus hat eine x -Koordinate von $p/2$, die Leitlinie von $-p/2$. In kartesischen Koordinaten erhält die Parabel, wie eingangs bereits angeführt, die Form $x^2 = 2p \cdot y$.

In unserem Beispiel der Sommersonnenwendlinie am Polarkreis ist aus der Geometrie des Meridianschnitts der Abstand x_{F_1} des Brennpunktes F_1 und der Abstand x_{S_1} des Scheitelpunktes S_1 der Parabel vom Fußpunkt F des Obeliskens zu ermitteln (Abb. 8). Zur Lösung bietet sich die Methode der Dandelin'schen Kugel an, die hier schnell zum Ziel führt. Eine der im Meridianschnitt gezeigten Kegelmantellinien verläuft parallel zur Horizontlinie. Zwischen diesen beiden Linien wird die Dandelin'sche Kugel eingepaßt. Damit ist ihr Radius r sogleich bekannt; mit $r = 1/2$ entspricht er der halben Höhe des Obeliskens (Abb. 8 oben). Die Polachse erhebt sich unter einem Winkel von $\phi = (90^\circ - \delta)$ von der Horizontalen. Ihr Schnittpunkt mit der Horizontallinie wird wieder mit X bezeichnet. Der Abstand von X zu F heißt wieder x_X . Die Kegelmantellinie des Sommerkegels, die auf der Horizontalen zum Scheitelpunkt S_1 führt, schließt mit der Horizontallinie den Winkel 2δ ein. Da im Grenzfall der parabelförmigen Datumslinie die geografische Breite durch die Sonnendeklination zu $(90^\circ - \delta)$ fixiert ist, ist zu erwarten, das die gesuchten Strecken nur mehr von δ abhängen. Man findet schnell:

$$x_{S_1} = \frac{1}{\tan(2\delta)}$$

$$x_X = \tan \delta$$

Die Dandelin'sche Kugel berührt die Horizontale am Fokuspunkt F_1 , der vom Scheitelpunkt S_1 der Parabel, welcher den Ursprung des xy -Systems bildet (Ursprung des $x'y'$ -Systems ist wieder F), den Abstand $p/2$ aufweist. Da der Radius der Kugel bereits bekannt ist, läßt sich p ebenfalls ohne Umstände aufschreiben. Ausgewertet wird das Dreieck aus S_1 , F_1 und dem Kugelmittelpunkt.

$$\tan \delta = \frac{r}{p/2} \Leftrightarrow p = \frac{1}{\tan \delta}$$

Der Abstand vom Fußpunkt F zum Brennpunkt F_1 errechnet sich aus der Differenz von $p/2$ und x_{S_1} :

$$x_{F_1} = p/2 - x_{S_1} = \frac{1}{2 \cdot \tan \delta} - \frac{1}{\tan(2\delta)} = \frac{\tan \delta}{2}$$

Bei der Vereinfachung fand die Beziehung $\tan(2\delta) = \frac{2 \cdot \tan \delta}{1 - \tan^2 \delta}$ Verwendung.

Alle für die Berechnung von xy - bzw. $x'y'$ -Wertepaaren der Parabel erforderlichen Größen sind damit bekannt. Wie vermutet, ist die Deklination die einzige bestimmende Größe für alle

Parameter. Bei gegebener Sonnendeklination δ überstreicht die Schattenspitze eine Parabel bei der geografischen Breite ($90^\circ - \delta$).

Erhöht man die geografische Breite weiter, so werden aus den Datumslinien, deren Deklination den Wert ($90^\circ - \phi$) übersteigt, Ellipsen. In der Berechnung nach dem Hyperbel-Formelsystems des vorigen Abschnitts zeigt sich dies an einem negativen Ergebnis für die große Halbachse und für den Abstand des Symmetriepunktes der Ellipse zum Fußpunkt. Dies bedeutet auch, dass die Datumslinie mit der dazugehörigen negativen Deklination nicht mehr auf der Sonnenuhr zu finden ist, denn die Sonne steht bei $\delta < -(90^\circ - \phi)$ niemals oberhalb des Horizontes, sie ist unterläufig.

Für die Berechnung von Ellipsenpunkten im kartesischen Koordinatensystem nimmt man in diesem Fall die Ellipsenformel

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

und setzt für a den Absolutbetrag ein. Die kleine Halbachse ermittelt man nach der für Ellipsen gültigen Formel

$$b = \sqrt{a^2 - e^2} \quad \text{bzw.} \quad b = a \cdot \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \phi}{\sin^2 \delta}}.$$

Erst am Nordpol werden alle Deklinationslinien zu Kreisen, da die Sonne dann im Tagesverlauf in konstanter Höhe am Himmel wandert. Es sind jedoch nur Linien positiver Deklination berechenbar. Bei allen negativen Deklinationen ist die Sonne unterläufig und wirft nie einen Schatten auf das horizontale Zifferblatt. Während der Tag-Nacht-Gleiche wandert die Sonne am Horizont und sie erzeugt auf dem mathematischen Horizont einen unendlich langen Schatten, zu dem es ebenfalls keine Datumslinie geben kann.

Die sieben bedeutsamen Datumslinien für Bodensonnenuhren am Äquator, Wendekreis, mittlerer nördlicher Breite von $51,5^\circ$, Polarkreis, Polarregion mit $\phi = 80^\circ$ und Nordpol sind in der Abbildung 9 zusammenfassend dargestellt. Der Fußpunkt des Obelisken hat jeweils die Koordinaten $(0,0)$.

Literatur

[1] Christine Penßel & Hans-Jürgen Penßel: Kegelschnitte; Bayerischer Schulbuch-Verlag, München 1993

[2] H. Karttunen, P. Kröger, H. Oja, M. Poutanen, K. J. Donner: Fundamental Astronomy; 3rd Edition, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York 1996

[3] Arnold Zenkert: Gestirns-Kompaß - Die Orientierung im Gelände nach Sonne, Mond und Sternen; Deutsch Taschenbücher Band 93, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main 1997

Ergänzende Literaturangaben:

Arnold Zenkert: Faszination Sonnenuhr; 2. Aufl. 1995, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt a. M. 1995

Heinz Schumacher: Sonnenuhren; Callwey-Verlag, München 1973

J.L.Heilbronn: The Sun in the Church - Cathedrals as Solar Observatories; Harvard University Press, Cambridge (MA) London 1999

Bildlegenden zu den Abbildung 1 - 9

Abbildung 1

Vier Schnitte in einen Kegel, deren Ebenen durch die Kegelschnittkurven Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel begrenzt werden.

Abbildung 2

Die Schattenspitze eines Obeliskens wandert im Laufe eines Tages auf ebenem Untergrund eine Kegelschnittkurve ab. In unseren Breiten stellen sich Hyperbeln ein, die im Winterhalbjahr nach Norden, im Sommerhalbjahr nach Süden geöffnet sind.

Ausnahmen von dieser Regel treten nur bei den Tag-Nacht-Gleichen zu Frühlings- und Herbstbeginn auf. Die tägliche Spur der Schattenspitze ist dann eine Gerade.

Abbildung 3

Darstellung der Geometrie der "Himmelskegel" im Meridianschnitt. Die Kegelachse deutet zum Himmelspol. Die Spitzen der Himmelskegel des Sommer- und Winterhalbjahres werden an der Spitze des Obeliskens angesetzt. Während der täglichen Wanderung der Sonne durchläuft der Sonnenstrahl, der die Obeliskenspitze trifft, die Kegelmantelfläche.

Abbildung 4

oben: Darstellung des Meridianschnitts mit der Lage der zu berechnenden Punkte auf der Nord-Süd-Linie der Horizontalebene.

unten: Darstellung der Horizontalebene in Draufsicht mit der Lage der zu berechnenden Punkte. Ebenfalls eingezeichnet sind die Hyperbeln und ihre Asymptoten sowie zwei kartesische Koordinatensysteme, deren Ursprung im Fußpunkt des Obeliskens bzw. im Symmetriepunkt der Hyperbeln liegt.

Abbildung 5

Die Kegelschnittgeometrie im Meridianschnitt, gezeichnet mit den Dandelin'schen Kugeln. Die Berührungspunkte der in die Kegel eingepaßten Kugeln mit der Kegelschnittebene (Horizontalebene) sind die Brennpunkte der Hyperbeln.

Abbildung 6

Darstellung der Himmelskugel im Schrägriß. Aus der Lage und Länge des Schattens lassen sich die Horizontalkoordinaten Höhe h und Azimuth a der Sonne bestimmen. Das Südazimuth der Sonne entspricht dem Nordazimuth des Schattens.

Abbildung 7

Die Ebene des mathematischen Horizontes mit den Hyperbeln für den Schattenverlauf am Tag der Wintersonnenwende (obere Hyperbel) und am Tag der Sommersonnenwende (untere Hyperbel). Die Asymptoten deuten in die extremalen Auf- oder Untergangsrichtungen der Sonne am Horizont, den sogenannten Sonnenwendpunkten. Die Richtlage der Asymptoten läßt sich damit auch aus einer Auf- oder Untergangsbeobachtung der Sonne bei einer Sonnenwende bestimmen.

Abbildung 8

oben: Meridianschnitt der Kegelgeometrie am Polarkreis, wo die Schattenspitze am Tag der Sommersonnenwende eine Parabel durchläuft. Der Sommerkegel (oben) reicht bis zum Nordpunkt, er schneidet die Horizontebene nicht. Der Winterkegel (unten) reicht bis zum Südpunkt. Er schneidet die Nord-Süd-Linie nur einmal. Dargestellt sind auch die für eine Analyse des Parabelverlaufs zu berechnenden Punkte.

unten: Die Horizontalebene mit der Parabel und den zu berechnenden Punkten in Draufsicht.

Abbildung 9

Datums- bzw. Deklinationslinien für Horizontalsonnenuhren am Äquator ($\phi = 0$; nur Hyperbeln), am Wendekreis ($\phi = 23,5^\circ$; nur Hyperbeln), in mittlerer Breite ($\phi = 51,5^\circ$; nur Hyperbeln), am Polarkreis ($\phi = 66,5^\circ$; eine Parabel, sonst Hyperbeln), in hoher nördlicher Breite ($\phi = 80^\circ$; Parabeln und Ellipsen) und am Nordpol ($\phi = 90^\circ$; nur Kreise).

Die schwarzen Punkte markieren den Fußpunkt des Obeliskens. Die Linien sind für jene Deklinationen δ berechnet, bei denen die Sonne in ein neues Tierkreiszeichen eintritt.

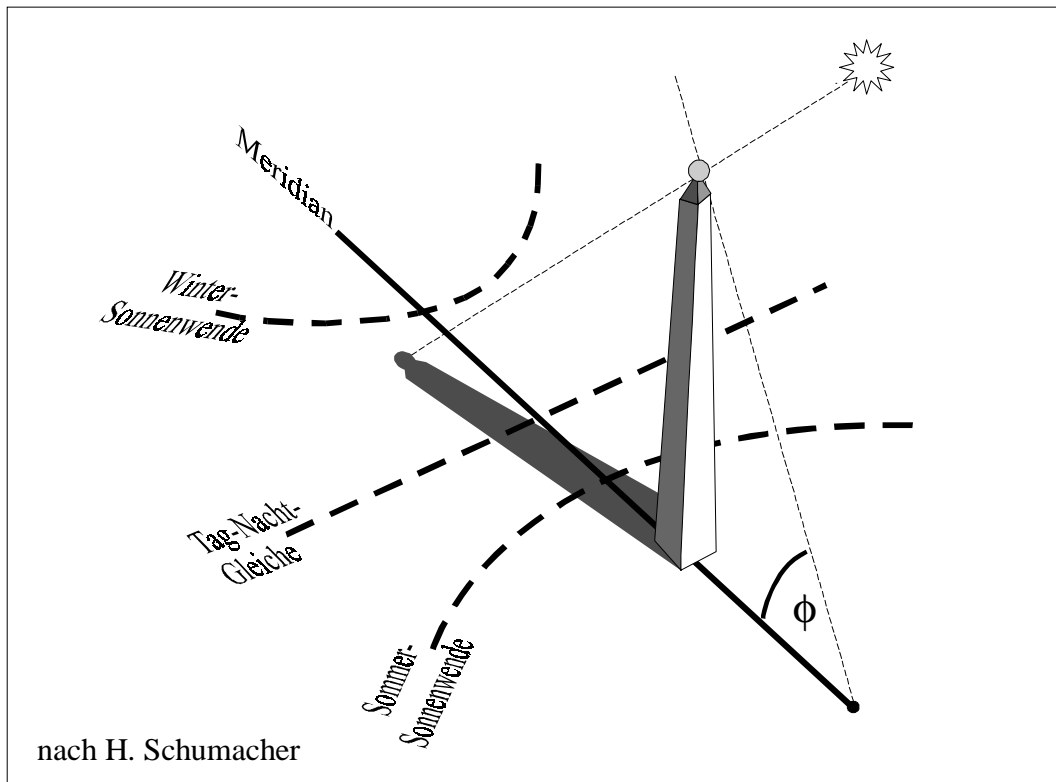
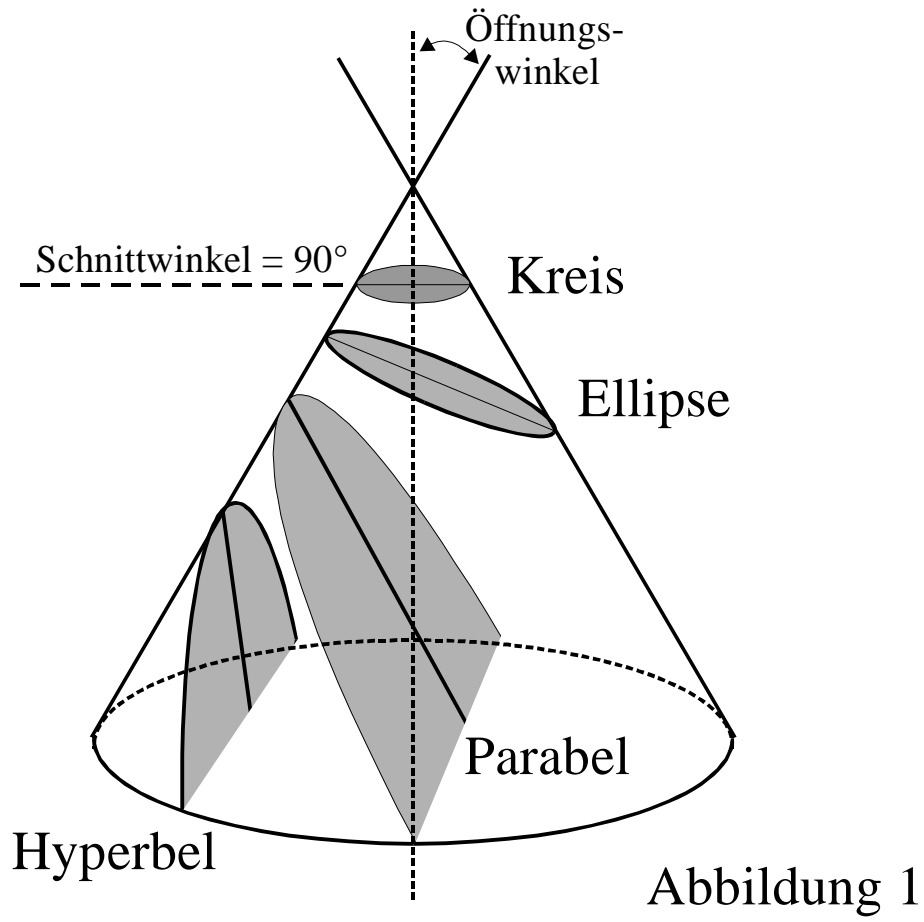


Abbildung 2

Schnitt durch den Meridian des Beobachters

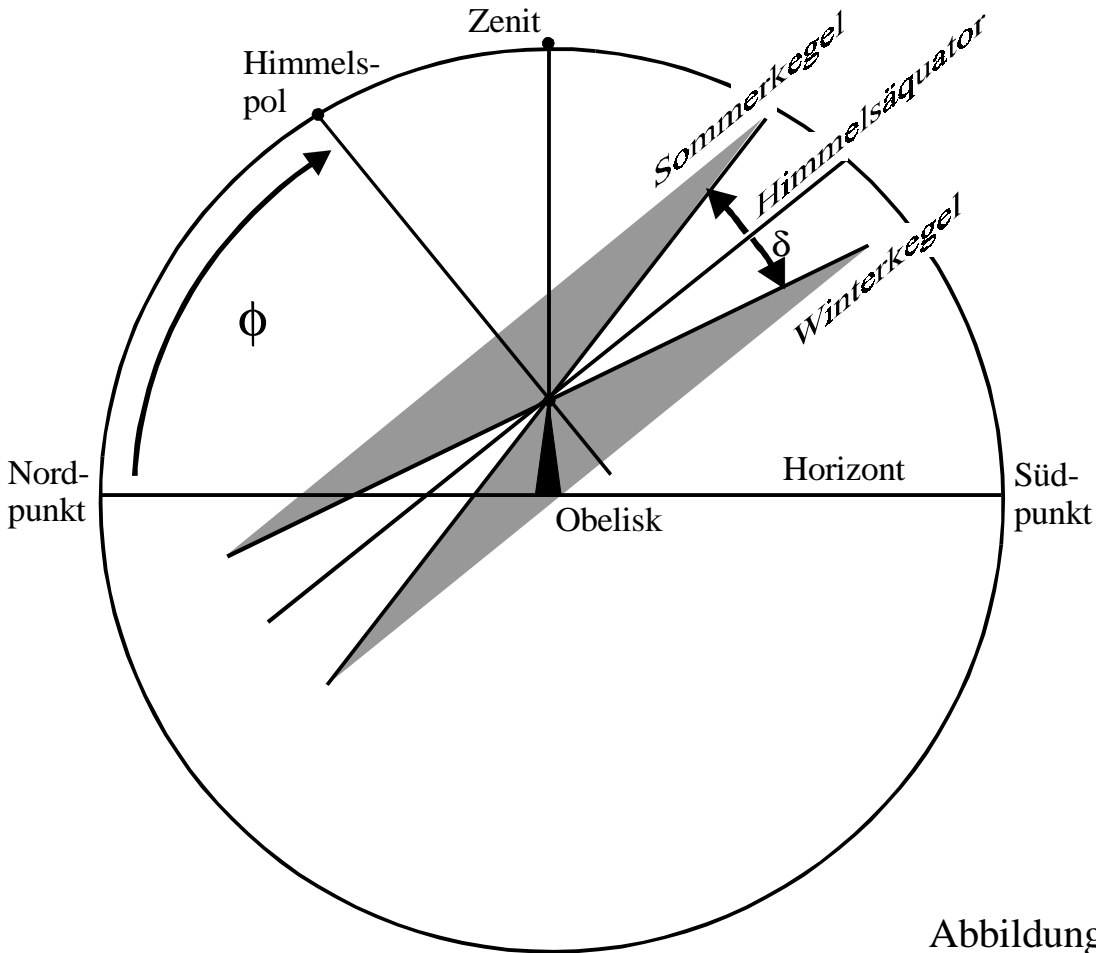


Abbildung 3

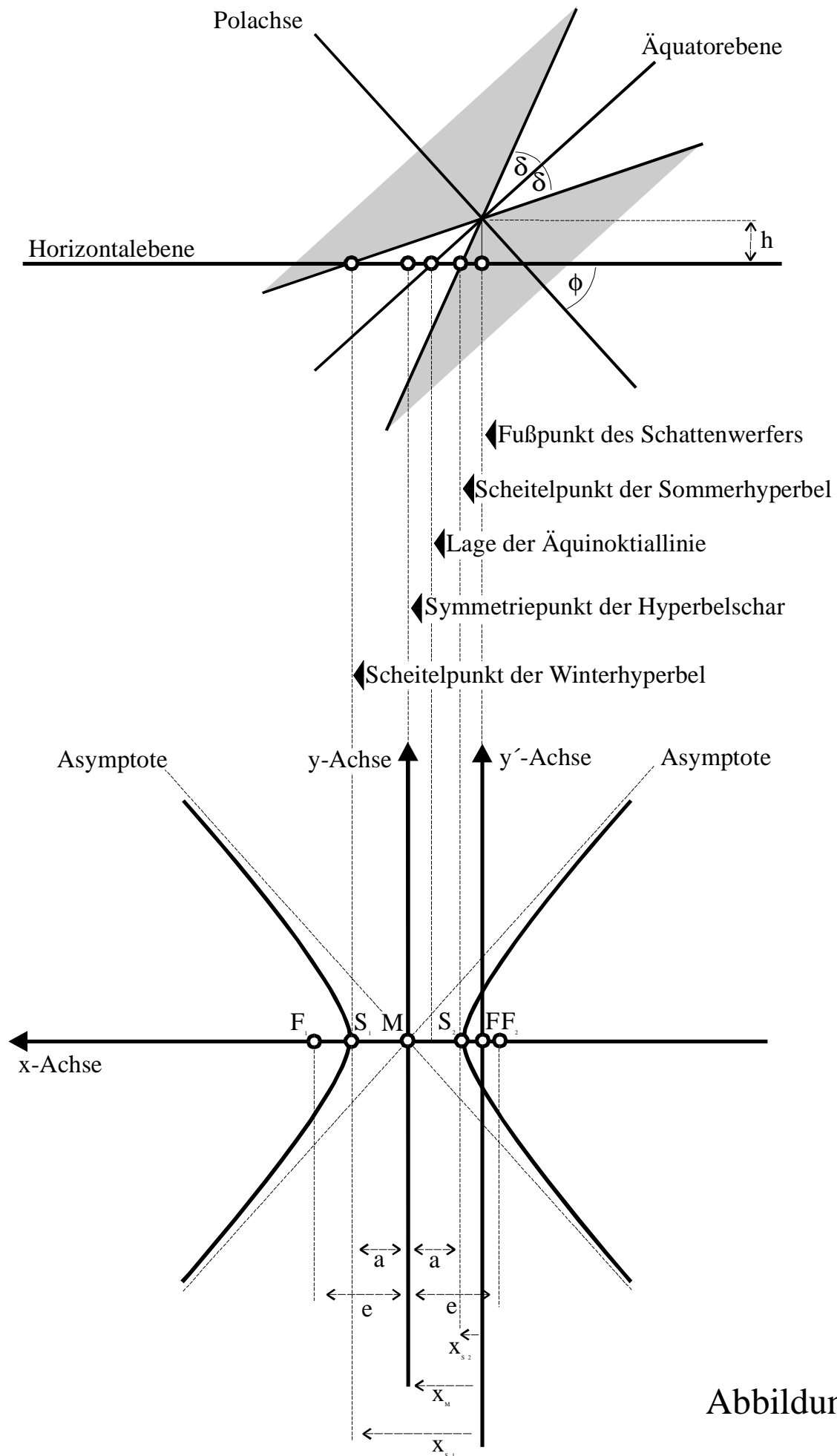


Abbildung 4

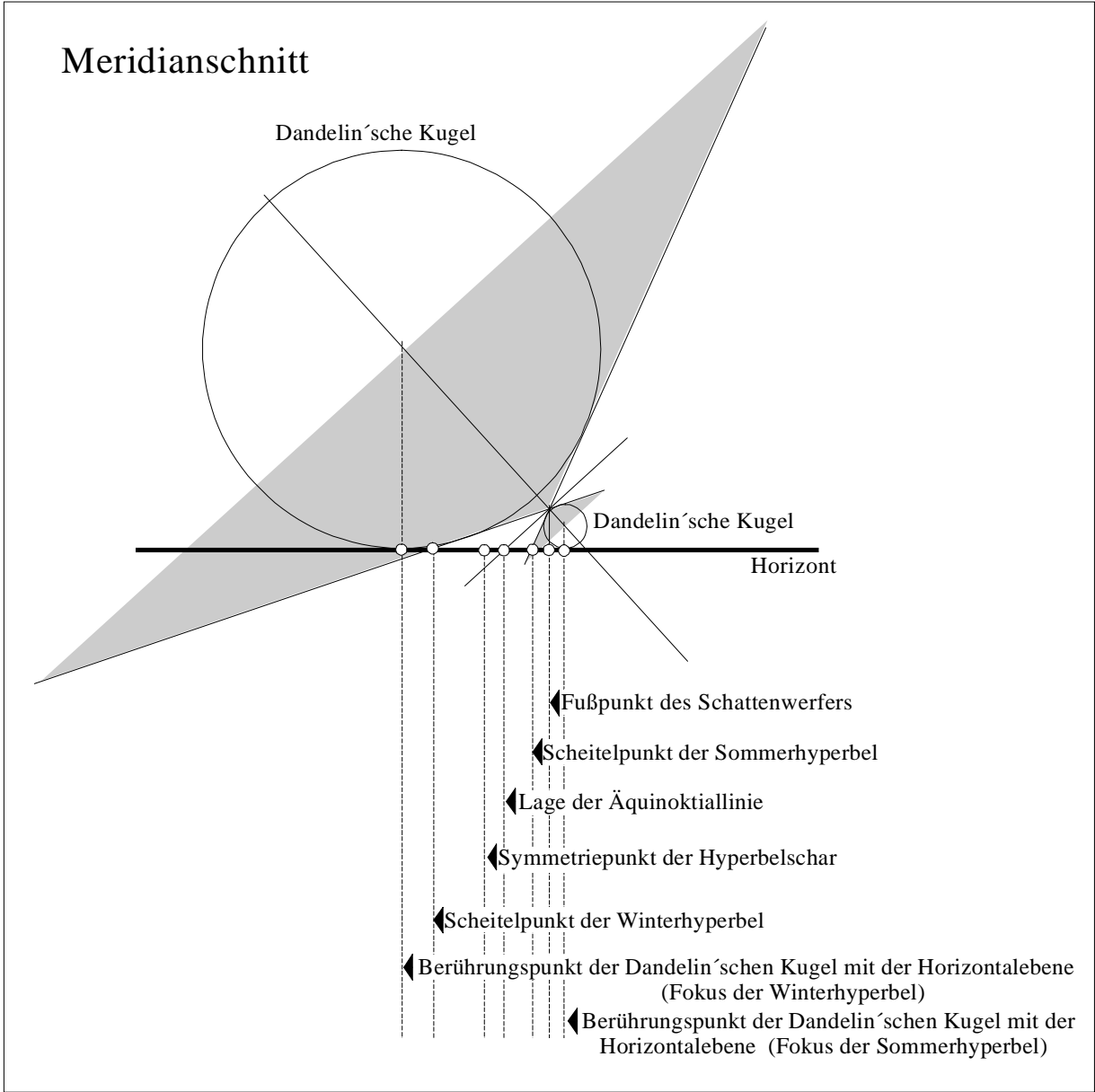


Abbildung 5

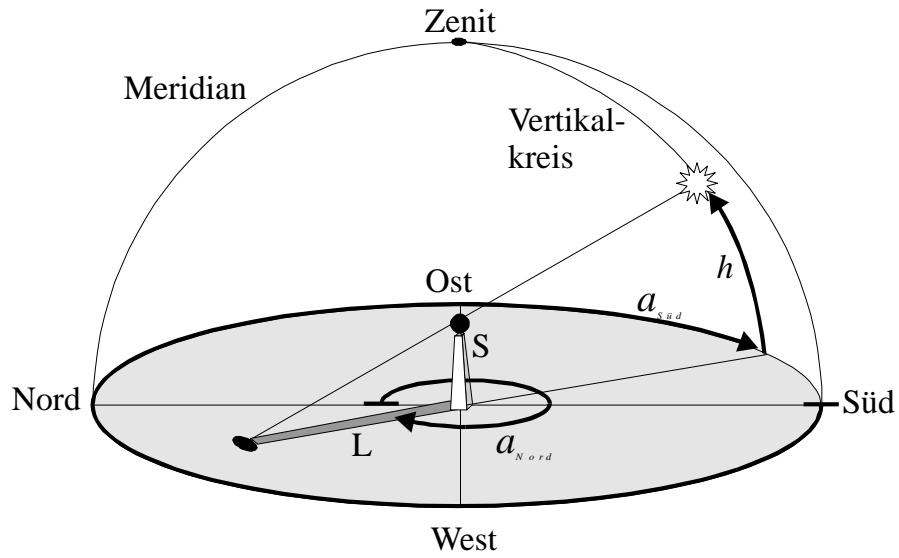
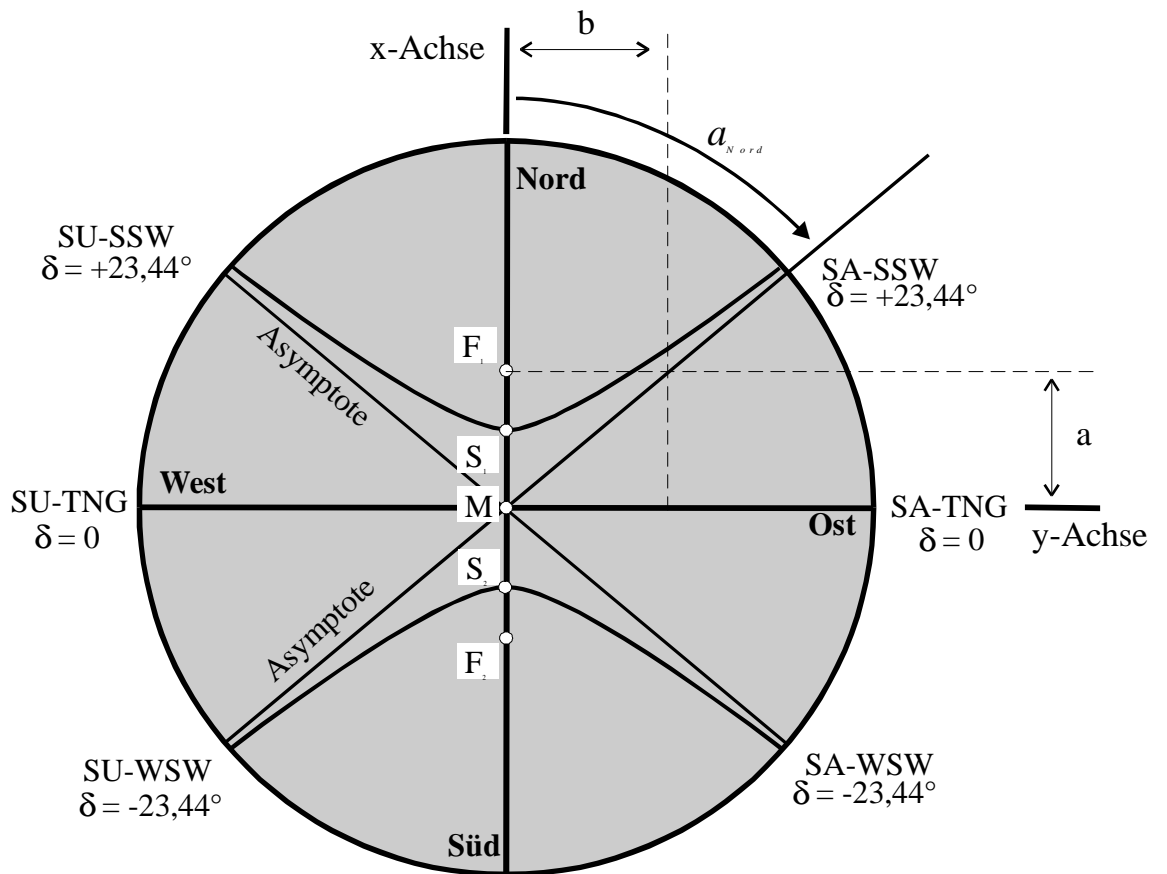


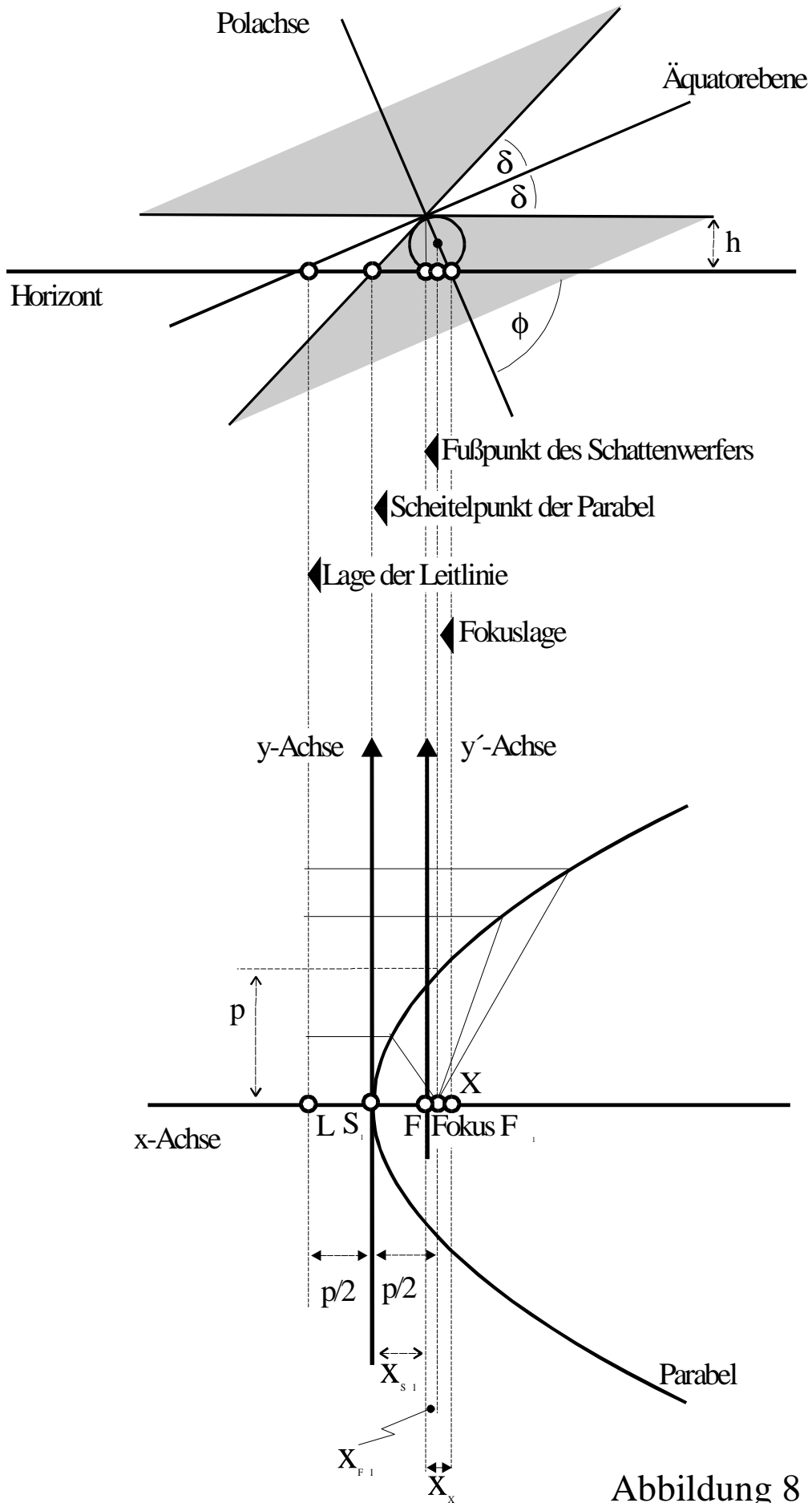
Abbildung 6



Legende:
 SA= Sonnenaufgang
 SU=Sonnenuntergang

SSW=Sommersonnenwende
 WSW=Wintersonnenwende
 TNG=Tag-und-Nachtgleiche

Abbildung 7



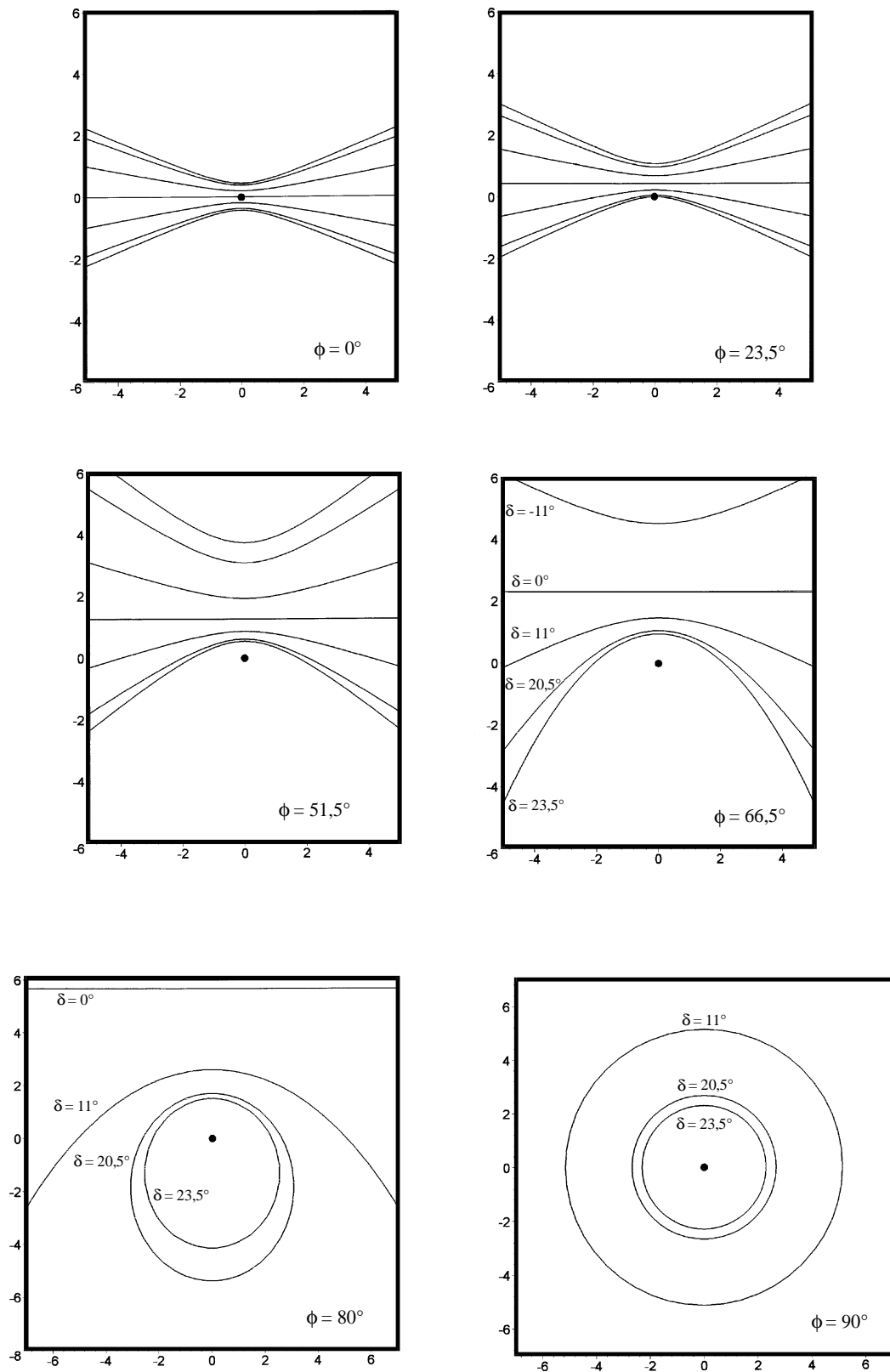


Abbildung 9