Bestimmung der geographischen Lage aus einer einzigen Schattenmessung

von Burkard Steinrücken, Universität Dortmund

Die Bestimmung der geographischen Lage aus astronomischen Beobachtungen gehört zu den klassischen Aufgaben der Positionsastronomie. Bereits mit einer einzigen Schattenmessung läßt sich ein grober Wert für die geographische Länge und Breite ermitteln. Benötigt wird nur ein senkrecht stehender Schattenwerfer (z. B. eine Straßenlaterne), eine eingenordete Azimuthskala und eine Uhr. Die eigentliche Messung dauert nur wenige Minuten und deshalb eignet sich das Verfahren gut für die Durchführung im Unterricht. Aber auch für die Durchführung während einer Klassenfahrt ist es als astronomische Projektarbeit gut geeignet. Ideal ist die Durchführung vieler Einzelexperimente von allen Schülerinnen und Schülern an ihrem jeweiligen Urlaubsort. Dann können bei Beginn des neuen Schuljahres die Urlaubsorte nach der Auswertung der Meßergebnisse „erraten“ werden.

Das Meßverfahren

Die Sonnenposition wird im Horizontsystem eines Beobachters durch die Angabe zweier Koordinaten eindeutig festgelegt - den Höhenwinkel *h* und das Südazimuth *a*. Weil sich die Deklination der Sonne - ihr Winkelabstand zum Himmelsäquator - von Tag zu Tag ändert, durchläuft sie täglich einen anderen Bogen am Himmel. Tage gleicher Sonnendeklination, von denen es jeweils zwei im Jahr gibt, wenn von den Wendepunkten abgesehen wird, sind aber auch Tage gleichen Sonnenlaufs.
Die Deklination der Sonne muß für den Beobachtungstag einem Jahrbuch oder einer drehbaren Sternkarte entnommen werden. Mit hinreichender Genauigkeit läßt Sie sich auch mit folgender Näherungsformel, die von Schlosser und Cierny[1] angegeben wird, berechnen:

$$\delta_{Sonne} \approx 23{,}5° \cdot \sin(Monat \cdot 30° + Tag \cdot 1° - 111°)$$

$$Monat: Nummer\ des\ Monats\ im\ Jahr$$

$$Tag: Nummer\ des\ Tages\ im\ Monat$$

Durch Schattenwurf werden die Höhe *h* und das Südazimuth *A* zu einer beliebigen Tageszeit gemessen. Auch das Datum und die Uhrzeit der Messung werden notiert. Die Höhe des Schattenwerfers *S* muß bekannt sein, damit aus der gemessenen Schattenlänge *L* nach *tan h = S/L* der Höhenwinkel bestimmt werden kann (Abbildung 1). Die Fläche, auf der der Schatten vermessen wird sollte möglichst eben sein. Die Nord-Südrichtung muß ebenfalls bestimmt sein. Aus Gründen einer raschen Durchführbarkeit sollte dazu ein Kompaß benutzt werden. Unter Umständen handelt man sich aber dadurch einen Azimuthfehler von einigen Grad ein, der durch die Mißweisung der Kompaßnadel und ferromagnetische Materialien in der Nähe des Meßplatzes begründet sein kann.
Auch bei guter Justierung der Azimuthskala liegt die Genauigkeitsgrenze des Verfahrens nur bei rund 1 Grad. Für eine exakte Bestimmung der geographischen Position ist es damit nicht geeignet. Es bietet aber wegen der raschen Meßwertgewinnung und der Durchführbarkeit bei einer beliebigen Tageszeit unschätzbare didaktische Vorteile, denn nur zu oft scheitern astronomische Arbeitsprojekte an der Organisation der Gruppe auf einen exakten und einzigen Beobachtungstermin hin.

[1] Wolfhard Schlosser & Jan Cierny: Sterne und Steine, Eine praktische Astronomie der Vorzeit, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1996, S. 134

Das Auswerteverfahren

Abbildung 2 zeigt eine mögliche Sonnenposition am Himmel des Beobachtungsortes. Eingetragen sind die Koordinaten im Horizontal- und Äquatorialsystem. Der Meridian, der den Nordpunkt mit dem Südpunkt über den Zenitpunkt verbindet, der Vertikalkreis, der vom Zenit über die Sonne zum Horizont verläuft, und der Stundenkreis, der den Pol mit der Sonne verbindet, bilden die drei Seiten des *Astronomischen Dreiecks*. Die Winkel dieses aus Großkreissegmenten gebildeten Dreiecks sind der Stundenwinkel *t*, der sich zwischen Meridian und Stundenkreis aufspannt, der Winkel *(180° - a)* zwischen Meridan und Vertikalkreis und der parallaktische Winkel π zwischen Stunden- und Vertikalkreis.

Für das Astronomische Dreieck gelten die Sinus- und Kosinussätze der Sphärischen Trigonometrie. Die Winkel und Seiten stehen dadurch in mannigfacher Beziehung. Abbildung 3 verdeutlicht die Zuordnung der astronomischen Koordinaten zu den Winkeln *(A, B, C)* und den Seiten *(a, b, c)* des sphärischen Dreiecks.

Sinussatz der sphärischen Geometrie:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

Kosinussätze der sphärischen Geometrie:

$$\cos A = \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a - \cos B \cdot \cos C$$

$$\cos a = \cos A \cdot \sin b \cdot \sin c + \cos b \cdot \cos c$$

Ist die Sonnendeklination δ bekannt, und werden die Winkel *h* und *a* gemessen, so lassen sich der Stundenwinkel *t* und die geographische Breite ϕ rechnerisch ermitteln. Der Stundenwinkel *t* ergibt sich unmittelbar aus dem Sinussatz, wenn er auf das in Abbildung 3 gezeigte Dreieck angewandt wird:

$$\frac{\sin t}{\sin(90°-h)} = \frac{\sin(180°-A)}{\sin(90°-\delta)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin t}{\cos h} = \frac{\sin A}{\cos\delta} \quad \Leftrightarrow \quad \sin t = \frac{\sin A \cdot \cos h}{\cos\delta}$$

Die Bestimmung von ϕ ist umständlicher. Dazu werden die zwei Kosinussätze auf das in Abbildung 4 wiedergegebene Dreieck angewandt. Gesucht ist $a = (90° - \phi)$. Bekannt sind $b = 90° - \delta$, $c = 90° - h$, $B = 180° - a$ und $C = t$ (*t* aus obiger Formel).
Im zweiten Kosinussatz wird nun der *cos A* durch Einsetzen des ersten Kosinussatzes eliminiert. Danach muß nur noch nach *cos a* aufgelöst werden. Man kommt zu folgendem Ergebnis:

$$\cos a = \frac{\cos b \cdot \cos c - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos B \cdot \cos C}{1 - \sin b \cdot \sin c \cdot \sin B \cdot \sin C}$$

Identifiziert man nun die Seiten und Winkel mit den astronomischen Koordinaten nach der in Abbildung 4 gegebenen Zuordnung, erhält man den für die geographische Breite ϕ gesuchten Ausdruck:

$$\sin\phi = \frac{\sin\delta\cdot\sin h+\cos\delta\cdot\cos h\cdot\cos a\cdot\cos t}{1-\cos\delta\cdot\cos h\cdot\sin a\cdot\sin t} \text{ bzw.}$$

$$\sin\phi = \frac{\sin\delta\cdot\sin h+\cos\delta\cdot\cos h\cdot\cos a\cdot\cos t}{1-\cos^2 h\cdot\sin^2 a},$$

wenn die Formel für *sin t* eingesetzt wird. Dabei fanden noch die aus den Additionstheoremen des Sinus und Kosinus abgeleiteten Vereinfachungen $\sin(90°-\alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90°-\alpha) = \sin\alpha$, $\sin(180°-\alpha) = \sin\alpha$ und $\cos(180°-\alpha) = -\cos\alpha$ Verwendung.
Erfolgt die Messung bei Höchststand der Sonne, so steht sie auf dem Meridian und sowohl der Stundenwinkel als auch das Südazimuth sind Null. In diesem Fall vereinfacht sich die Formel zu: $\sin\phi = \sin\delta\cdot\sin h+\cos\delta\cdot\cos h$

Durch die Berechnung von ϕ ist die erste Teilaufgabe, die Bestimmung der geographischen Breite, gelöst. Für die Lösung der zweiten Teilaufgabe, der Bestimmung des Längengrades λ sind einige zeitliche Betrachtungen anzustellen. Der Längengrad eines Ortes wird in Differenz zum Nullmeridian in Greenwich / England gezählt. Die auf der Uhr abgelesene Beobachtungszeit muß deshalb in die für Greenwich gültige Ortszeit, die auch *Weltzeit* oder *Universalzeit (UT)* genant wird, umgewandelt werden. Für die mitteleuropäische Zonenzeit gilt: *MEZ = UT + 1 Stunde*, bzw. während der Sommerzeit *MESZ = UT + 2 Stunden*.
Wer die Mitteleuropäische Zeitzone während des Urlaubs verläßt, muß die „Zeitverschiebung“ zum Urlaubsland zur Ermittlung des Beobachtungszeitpunktes in *UT* berücksichtigen. Zum Vergleich des Stundenwinkels *t* mit der Weltzeit *UT* der Beobachtung muß *t* ins Zeitmaß überführt werden. Eine Winkelspanne von 15° entspricht einer Zeitdifferenz von 1 Stunde, da der Vollkreis von 360° in 24 gleiche Stunden unterteilt ist. Zur Erinnerung: Der Stundenwinkel gibt die Winkelspanne zwischen dem Meridan und dem Stundenkreis der Sonne an, die sich am Himmelspol aufspannt. Beträgt diese Spanne -30°, so war die Messung zwei Stunden vor dem Meridiandurchgang.
Nach der folgenden Rechenvorschrift lassen sich Stundenwinkel in die *Wahre Ortszeit (WOZ)* umwandeln (vor der Kulmination ist *t* negativ; Stundenbruchteile sind noch in Minuten umzuwandeln).

$$WOZ = 12\ Uhr + \frac{t\ (in\ Grad)}{15°}\ Stunden$$

Die Wahre Ortszeit (*WOZ*) ist abschließend noch in die *Mittlere Ortszeit (MOZ)* zu überführen. Erst dann kann ein Vergleich mit der Weltzeit erfolgen. Wegen Ungleichheiten im Sonnenlauf (bzw. im elliptischen Umlauf der Erde um die Sonne) und der variablen Sonnendeklination wurde eine mittlere Sonne eingeführt, um im bürgerlichen Leben nicht mit einem Zeitmaß leben zu müssen, welches auf variablen Zeitspannen zwischen aufeinanderfolgenden Meridiandurchgängen (also: unterschiedlichen Tageslängen) basiert.
Die Umwandlung der *WOZ* in die *MOZ* erfolgt unter Anbringung einer von Tag zu Tag unterschiedlichen Korrektur, die unter dem Namen *Zeitgleichung* bekannt ist. Es gilt:

MOZ = WOZ + Zeitgleichung

Die Zeitgleichung ist in der Abbildung 5 graphisch aufgetragen (entnommen aus Roth[2]). Mit folgender Näherungsformel läßt sich der gültige Tageswert mit etwa Minutengenauigkeit auch rechnerisch ermitteln:

$$\begin{aligned} Zeitgleichung &\approx -10\,Minuten \cdot \sin(2 \cdot (\,Monat \cdot 30° + Tag \cdot 1° - 111°\,)) \\ &\quad + 8\ Minuten \cdot \sin(\,Monat \cdot 30° + Tag \cdot 1° - 33°\,) \end{aligned}$$

$Monat$: $Nummer\ des\ Monats\ im\ Jahr$

Tag: $Nummer\ des\ Tages\ im\ Monat$

Zum Vergleich sind einige Werte der Zeitgleichung, die mit dieser Formel gewonnen wurden, in Abbildung 5 als dunkle Punkte eingezeichnet.

Die Ortszeit und die Weltzeit können nun miteinander verglichen werden. Aus der Differenz geht der Längenunterschied zwischen dem Beobachtungsort und dem Nullmeridian hervor. Auch hier entspricht ein Zeitunterschied von einer Stunde einem Längenunterschied von 15°, bzw. 1 Längengrad entspricht 4 Minuten(λ positiv: östliche Längen, λ negativ: westliche Längen).

$$MOZ(\lambda) = UT + \lambda \cdot 4\ Minuten$$

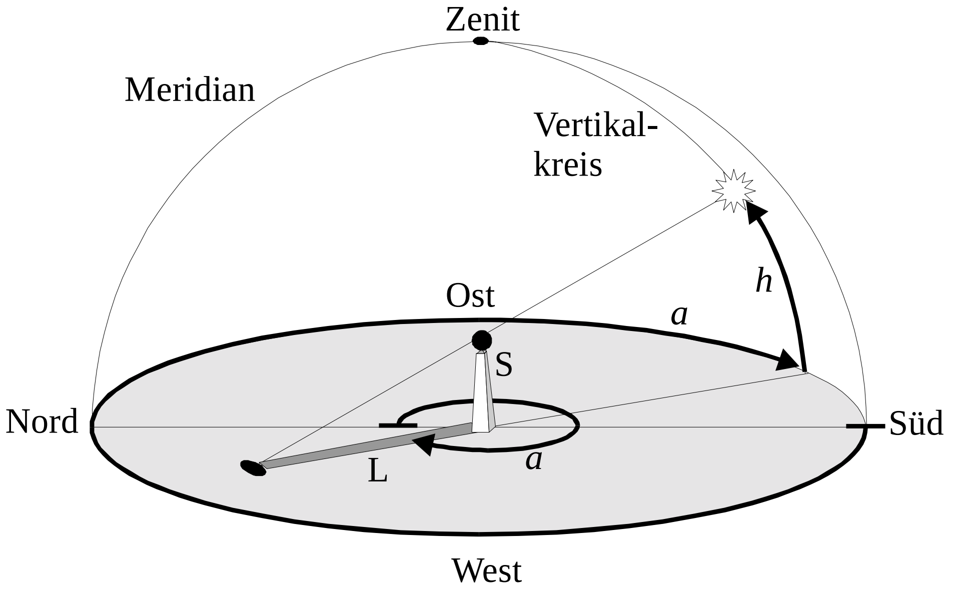
$$\Leftrightarrow$$

$$\lambda = \frac{MOZ(\lambda) - UT}{4\ Minuten} = \frac{MOZ(\lambda) - MEZ + 1 Stunde}{4\ Minuten} = \frac{MOZ(\lambda) - MESZ + 2 Stunden}{4\ Minuten}$$

Abschließend bleibt zu sagen, daß sich mit dem vorgestellten Verfahren eine rasche Möglichkeit bietet, die geographische Position auf der Erde zu bestimmen, ohne den Meridiandurchgang abwarten zu müssen. Den großen Vorteil der zeitlichen Unabhängigkeit erkauft man sich allerdings durch die kompliziertere Auswertung, die auf den Basisformeln der sphärischen Trigonometrie beruht.
Für einen Einsatz im Unterricht kann die in Abbildung 6 gegeben Kopiervorlage für eine Azimuthskala benutzt werden. Zur Ausrichtung wird zunächst ein Kompaß in die Mitte gestellt und danach für die Schattenmessung durch einen senkrecht stehenden Schattenwerfer ersetzt, der z.B. aus einem Holzkegel (in jedem Bastelgeschäft erhältlich) gefertigt ist, auf den ein Stecknadelkopf befestigt wurde. Ein Meßprotokoll, welches die Schülerinnen und Schüler z.B. am Urlaubsort erstellen, muß folgende Daten enthalten:

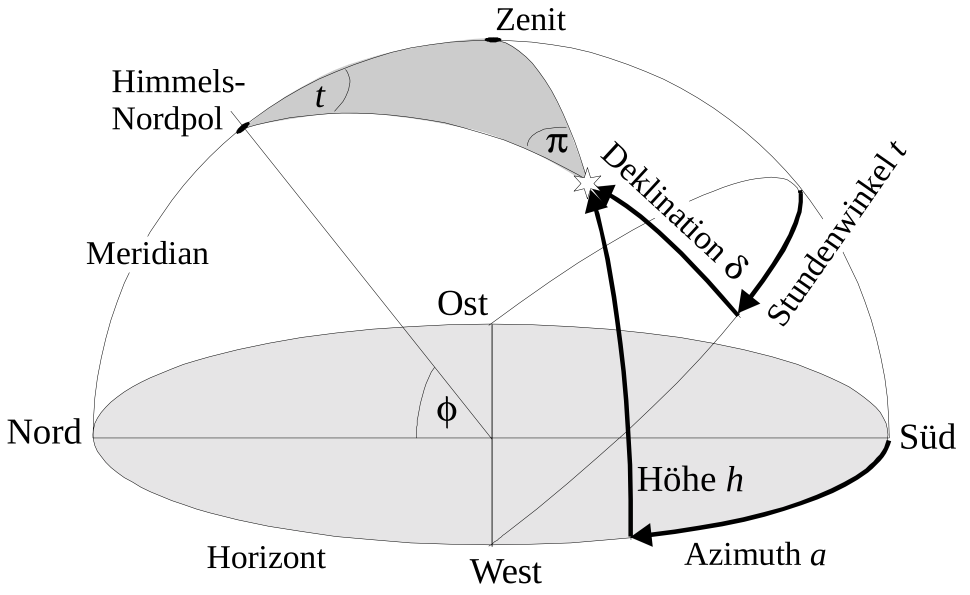
Meßprotokoll	
Datum der Schattenbeobachtung	
Uhrzeit der Schattenbeobachtung	
Zeitverschiebung zur Mitteleuropäischen Zeitzone	
Höhe des Schattenstabes	$S =$
Länge des Schattens	$L =$
Winkel des Schattens zur Nordrichtung (über Ost gezählt) (entspricht dem Südazimuth der Sonne, über West gezählt)	$a =$

---
[2] Günter Dietmar Roth (Hrsg.): Handbuch für Sternfreunde - Band 1, 4. Aufl., Springer Verlag, Berlin Heidelberg 1989, S. 288



Schattenmessung zur Bestimmung des Höhenwinkels *h* und des Azimuthes *a*

Abbildung 1



Das Astronomische Dreieck

Abbildung 2

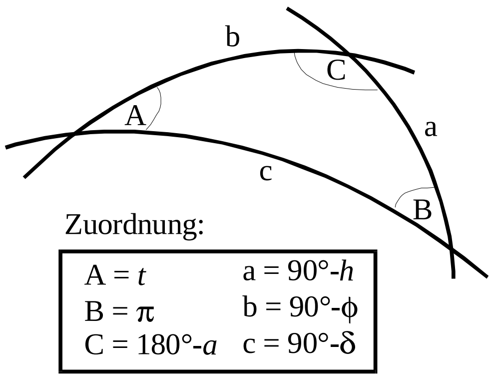


Abbildung 3

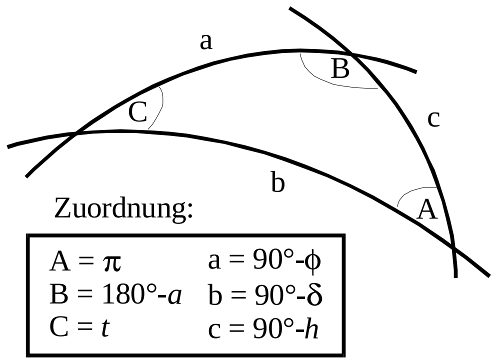


Abbildung 4

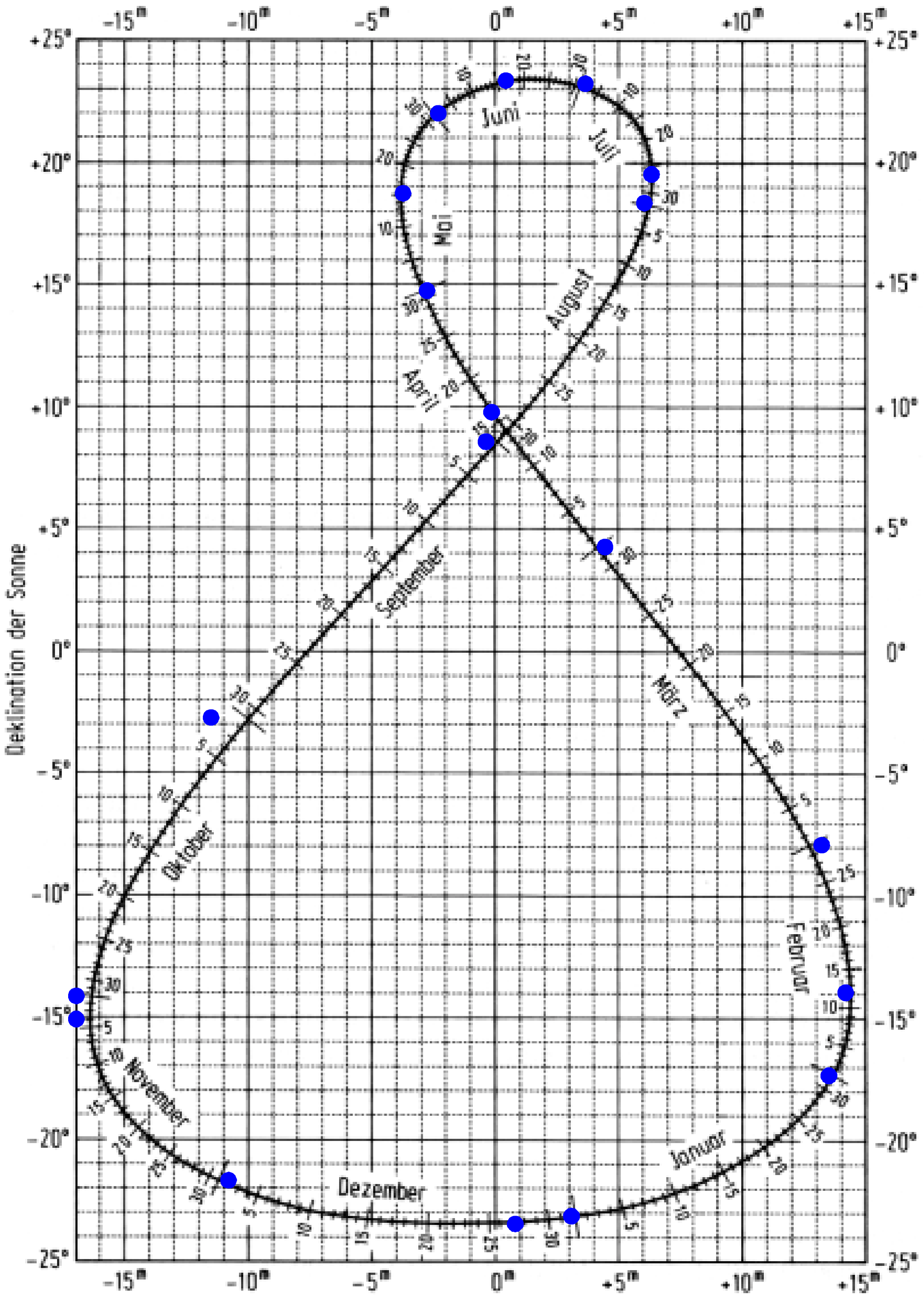


Abbildung 5: Zeichnerische Auftragung der Zeitgleichung

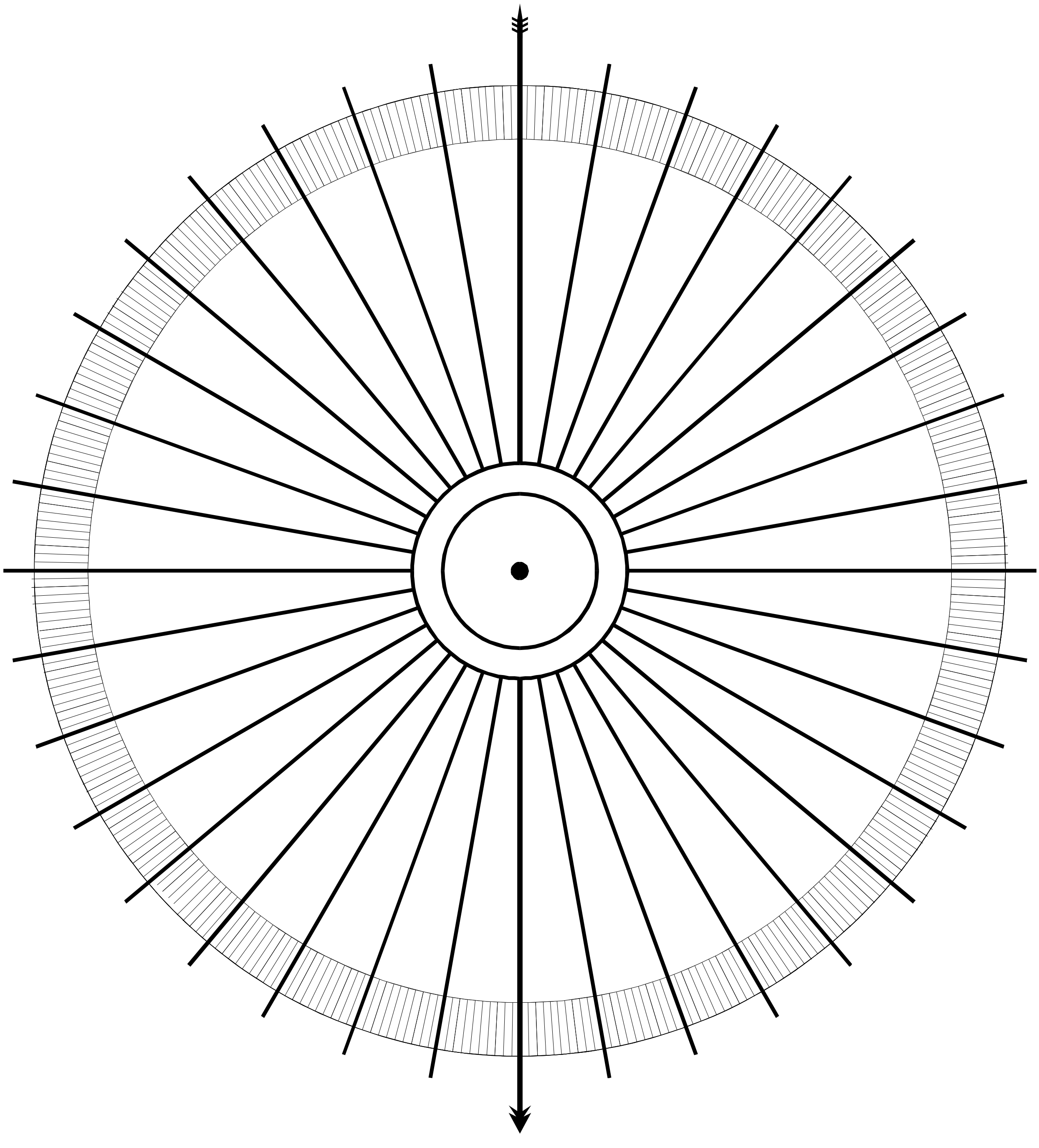


Abbildung 6: Kopiervorlage für eine Azimuthskala