

Bestimmung der geographischen Breite mit Digitalkamera oder Schattenstab

Jürgen Giesen, jgiesen@t-online.de

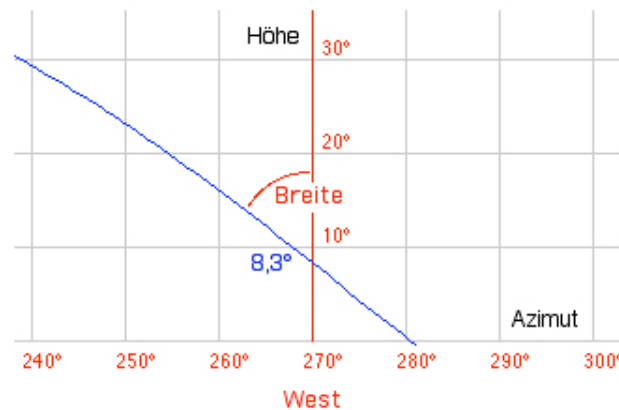
Ein altbekanntes und sehr einfaches Verfahren zur Breitenbestimmung [1] wird hier in zwei Varianten mit leicht verfügbaren Hilfsmitteln vorgestellt.

1. Methode: Digitalkamera

Die Kamera muss über manuelle Einstellmöglichkeiten verfügen. Weiter benötigt man Stativ, Wasserwaage, Filterfolie (Sonnenschutzbrille) als Objektivfilter zum Fotografieren der Sonne, Kompass, und zur Auswertung der Fotos ein Zeichenprogramm. Allerdings ist sie nur im Sommerhalbjahr durchführbar, wenn die Sonne eine nördliche Deklination hat.

Im Gegensatz zu anderen Verfahren der Breitenbestimmung, z.B. aus der Mittagshöhe der Sonne oder aus zwei Höhen, müssen die Deklination der Sonne und die Uhrzeit nicht bekannt sein. Auch ein Winkelmessgerät benötigt man nicht.

Astronomische Grundlage der Methode ist die Tatsache, dass alle Himmelsobjekte, unabhängig von ihrer Deklination, mit ihrer Bahnkurve am Himmel den ersten Vertikal (Ebene senkrecht zur Meridianebene) unter einem Winkel schneiden, der gleich der geographischen Breite des Beobachtungsortes ist:

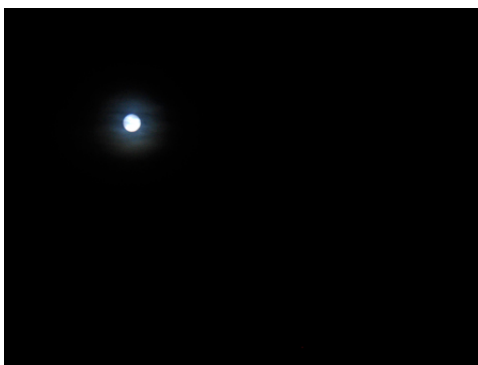


Sonnenbahn beim Untergang mit $6,5^\circ$ Deklination nach [2]

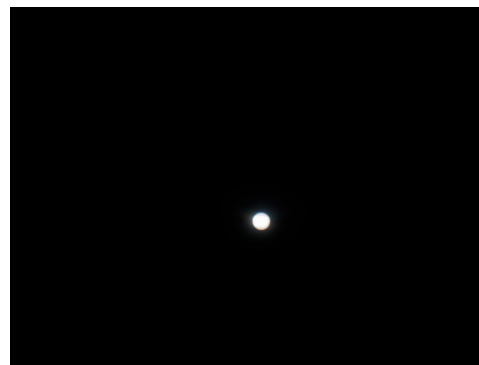
Der Winkel mit der Horizontalen stimmt mit dem parallaktischen Winkel („Winkel am Stern“) des sphärisch-astronomischen Grunddreiecks überein.

Mit dem Kompass richtet man die möglichst genau waagrecht justierte Kamera in Richtung Ost bzw. West aus. Zwei Aufnahmen genügen: kurz vor und nach Passieren des ersten Vertikals.

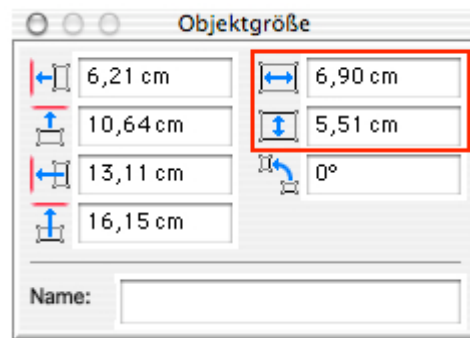
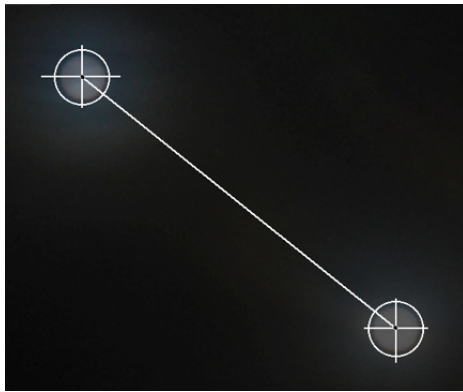
Beobachtungsort Welper (Kreis Soest): $51,62^\circ$ Nord, $7,96^\circ$ Ost, am 6. 4. 2011



19:01 MESZ
Azimut $268,3^\circ$, Höhe $9,7^\circ$ [3]



19:21 MEZ
Azimut $272,2^\circ$, Höhe $6,6^\circ$ [3]



Overlay mit Auswertung:

Parallaktischer Winkel (mit dem Horizont) = $\arctan(5,51/6,90) = 38,6^\circ$

Geographische Breite: $90^\circ - 38,6^\circ = 51,4^\circ$

Da der überstrichene symmetrische Azimutbereich $270^\circ \pm \text{ca. } 2^\circ$ (in etwa 20 Minuten) klein ist, ändert sich der Winkel annähernd linear, und es ist keine weitere Korrektur (Umrechnung auf 270°) erforderlich. Der Fehler der Winkelmessung im Zeichenprogramm bleibt kleiner als $0,1^\circ$. Die Genauigkeit der Methode hängt wesentlich von der sorgfältigen horizontalen Justierung der Kamera ab.

Das obige Ergebnis weicht um nur $0,2^\circ$ vom Sollwert ab und ist damit genauer als die Breite aus der Höhe des Polarsterns, der um $0,7^\circ$ vom Himmelspol abweicht, und in oberer und unterer Kulmination einen Fehler dieser Größe ergibt.

Prestel [1] erreichte aus Messungen von Höhenänderung der Sonne (siehe Teil 2) mit einem Reflexions-Prismenkreis und benötigter Zeit eine Genauigkeit von 6 Bogensekunden.

Fotografische Details und Fehlerquellen

Als Objektivfilter dient Sonnenfilterfolie für visuelle Beobachtungen (Baader Planetarium, neutrale Dichte 5, d.h. Absorption 99.999%). Es genügt auch, eine Sonnensichtbrille vor das Objektiv zu halten.

Pocket-Kamera Canon PowerShot A520, Aufnahmemodus manuell, Entfernungseinstellung auf unendlich, ISO 50, Belichtungszeit 1/10 s, Blendenzahl 5,5, Brennweite 23,2 mm (Zoom).

Stativkopf mit eingebauter Röhrenlibelle, auf Wasserwaagen wird hierfür eine Genauigkeit von 1 mm auf 1 m oder $0,057^\circ$ angegeben.

Wenn man in Horizontnähe beobachtet, wo sich die atmosphärische Refraktion sehr schnell ändert, misst man den parallaktischen Winkel zu klein.

Bei 6 Messungen betrug der mittlere Fehler der geographischen Breite $0,3^\circ$

Herleitung 1:

Aus der Transformationsformel der sphärischen Astronomie für a =Azimut, h =Höhe, φ =geogr. Breite, δ =Deklination:

$$\cos a = \frac{\sin h \sin \varphi - \sin \delta}{\cos h \cos \varphi}$$

und mit Hilfe der Differenzialrechnung

$$\frac{d}{dh} \cos a = -\sin a \frac{da}{dh}$$

folgt für den parallaktischen Winkel

$$\frac{dh}{da} = -\frac{\cos \varphi \cos h \sin a}{\sin \varphi \cos h + \cos \varphi \sin h \cos a}$$

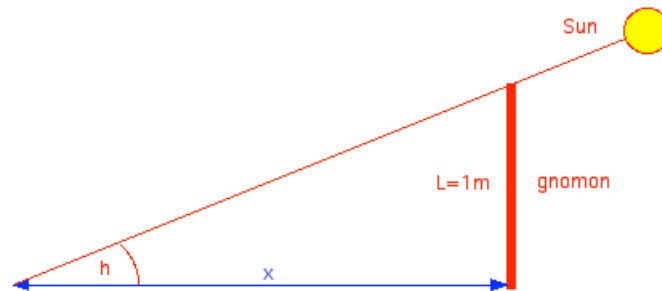
Am ersten Vertikal (Ost: $a=90^\circ$, West: $a=270^\circ$) vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$\left| \frac{dh}{da} \right| = \cot \varphi = \tan(90^\circ - \varphi)$$

2. Methode: Schattenstab

Zusätzlich sind nur Uhr, Zollstock und Kompass erforderlich. Das Verfahren beruht auf der Tatsache, dass für jeden Himmelskörper unabhängig von seiner Deklination am ersten Vertikal (Ost oder West) eine sehr einfache Beziehung zwischen der zeitlichen Änderung seiner Höhe h und der Ortsbreite φ gilt (siehe Herleitung 2):

$$\Delta h / \Delta t \cdot 4 \text{ min}^\circ = \cos \varphi$$



Es sind zwei Schattenlängen eines senkrechten Gnomons kurz vor und nach der genau östlichen oder westlichen Position der Sonne zu messen, sowie das zugehörige Zeitintervall. Die morgentlichen die Schattenlängen sind x_1 und x_2 :

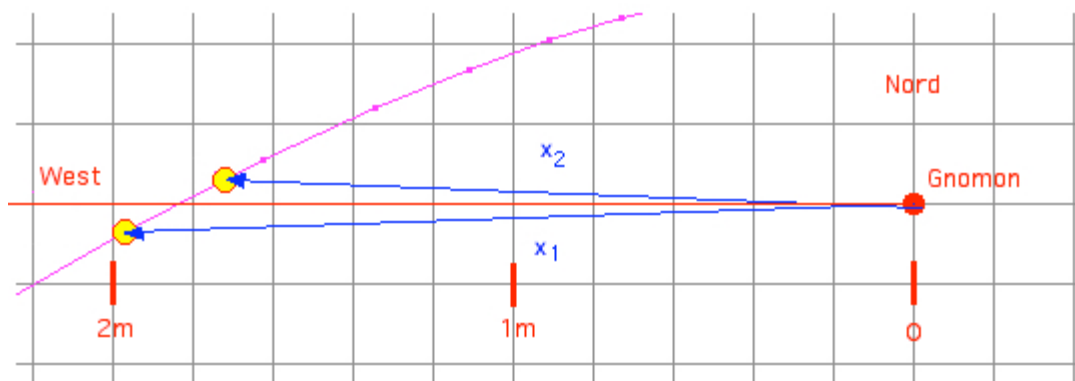


Bild nach [4]

$$h_2 = \arctan(L/x_2), h_1 = \arctan(L/x_1),$$

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \arctan(L/x_2) - \arctan(L/x_1),$$

Die berechnete Höhendifferenz (in Grad) und die gemessene Zeitdifferenz (in Minuten) liefern dann sofort die geographische Breite.

Simulierte Messung:

Beobachtungsort Welper (Kreis Soest): $51,62^\circ$ Nord, $7,96^\circ$ Ost, am 1. 7. 2011

Gnomonlänge $L=1\text{m}$

Um 8:30 MESZ ($a=87,93^\circ$, $h=26,91^\circ$, [3]): gemessene Schattenlänge $x_1=1,97\text{ m}$

Um 8:51 MESZ ($a=92,04^\circ$, $h=30,17^\circ$, [3]): gemessene Schattenlänge $x_2=1,72\text{ m}$

$\Delta h = 30,17^\circ - 26,91^\circ = 3,26^\circ$, $\Delta t=21,0\text{ min}$

Ergebnis: $\varphi = 51,61^\circ$

Herleitung 2:

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

Durch Ableiten folgt (φ und δ konstant):

$$\frac{dh}{dt} = - \frac{\cos \varphi \cos \delta \sin t}{\cos h}$$

Einsetzen der Transformationsformel $\cos \delta \sin t = \cos h \sin a$ ergibt:

$$\frac{dh}{dt} = -\cos \varphi \sin a$$

und im ersten Vertikal ($|\sin a| = 1$):

$$\left| \frac{dh}{dt} \right| = \cos \varphi$$

[1] M.A.F. Prestel: Höchst einfaches Verfahren die geographische Breite zu bestimmen, Astronomische Nachrichten, Vol. 37, 1854. p. 281-284.
http://articles.adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-iarticle_query?db_key=AST&bibcode=1853AN.....37..281.&letter=.&classic=YES&defaultprint=YES&whole_paper=YES&page=1&epage=5&send=Send+PDF&filetype=.pdf

[2] Prime Vertical Applet: <http://www.geoastro.de/PrimeVertical/>

[3] berechnet mit: MICA, Multiyear Interactive Computer Almanach, U. S. Naval Observatory.

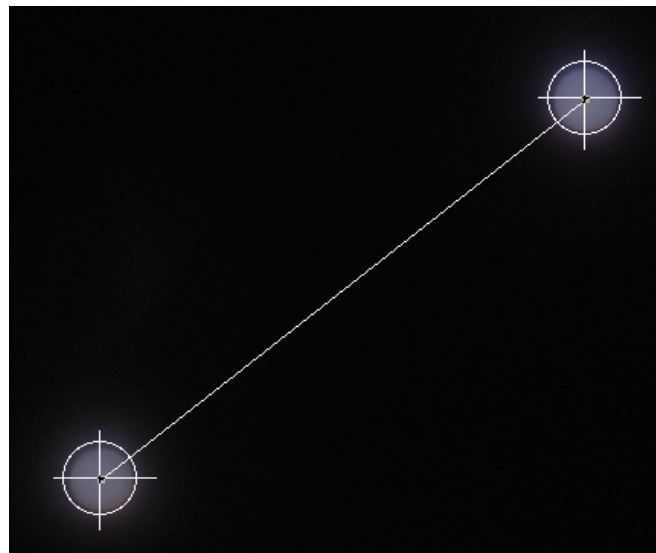
[4] Analemma Sundial Applet: <http://www.geoastro.de/analemma/>

Bücher:

Wilfried Kuhn (Hrsg.): Handbuch der experimentellen Physik Sekundarbereich II, Band 11N: Astronomie-Astrophysik-Kosmologie, Kapitel 2, Aulis Verlag, 2011, ISBN 978-3761423967.

William Chauvenet: A Manual of Spherical and Practical Astronomy: Vol. I Spherical Astronomy, Lippincott, Philadelphia, 5th Ed. 1891. p. 303-304.

Anhang: weitere Messungen mit Digitalkamera, am 11. 4. 2011, morgens



07:45:00 MESZ, ($a=87,94^\circ$, $h=8,85^\circ$, [3])

08:06:00 MESZ, ($a=92,05^\circ$, $h=12,11^\circ$, [3])

Parallaktischer Winkel = $\arctan(8,85/11,22) = 38,27^\circ$

Geogr. Breite $51,73^\circ$ (statt $51,62^\circ$) Fehler $0,11^\circ$

07:40:06 MESZ, ($a=86,98^\circ$, $h=8,08^\circ$, [3])

08:11:00 MESZ, ($a=93,04^\circ$, $h=12,88^\circ$, [3])

Parallaktischer Winkel = $\arctan(13,09/16,53) = 38,375^\circ$

Geogr. Breite $51,62^\circ$ (statt $51,62^\circ$), Fehler $0,0^\circ$